ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 17 | Dezember 1937 | Heft 6

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße.

Von *Bl. Dolaptschiew* aus Sofia, z. Zt. in Göttingen.

Die von Th. v. Kármán 1912 angegebene Stabilitätsbedingung der Wirbelkonfiguration, welche aus zwei parallelen Reihen unsymmetrisch angeordneter Wirbel mit gleichen und entgegengesetzten Zirkulationen besteht, enthält, wie bekannt, eine gewisse Unvollständigkeit in sich, die bis auf den heutigen Tag eine ganze Reihe von Betrachtungen veranlaßt hat. Es handelt sich um die Tatsache, daß die theoretische Bedingung $\mathfrak{Cof}\, \varkappa\pi = \sqrt{2}$, welche sich auch experimentell genügend bestätigt, sich nur als eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung des stabilen, genauer gesagt, des indifferenten Gleichgewichts erweist ($\varkappa = h/l$ ist das Verhältnis der Abmessungen in der Anordnung eines Wirbelpaares).

Neuere Untersuchungen des Problems haben darüber hinaus zu der Schlußfolgerung geführt, daß die Kármánsche Wirbelstraße überhaupt instabil sei. Diese Instabilität wird bei einem speziellen Störungsgesetz und einer speziellen Art von Anfangsstörungen gesucht, sowohl bei Störungen erster Ordnung[1]), als auch dann, wenn Störungen höherer Ordnung[2]) herangezogen werden.

Mit diesem Artikel[3]) wollen wir eine Bestätigung der Stabilität der Kármánschen Wirbelstraße geben und zeigen, daß die bekannte Stabilitätsbedingung die einzige bleibt, und zwar bei allen von den unten zitierten Autoren angenommenen Voraussetzungen. Sowohl die von G. Durand gefundenen Ergänzungen, ohne die Instabilität herrschen soll, als auch die Instabilität, an die sich C. Schmieden stößt, werden sich dadurch als scheinbar erweisen.

[1]) G. Durand: „Sur la stabilité des fils tourbillonaires", C. R. des Séances de l'Ac. des Sciences, t. 196, 1933, 1. p. 382—385.

[2]) C. Schmieden: „Zur Theorie der Kármánschen Wirbelstraße", I u. II; Ing.-Archiv, 1936, Bd. VII, S. 215 u. S. 387.

[3]) Vorliegender Aufsatz soll ein kurzer Auszug meiner Doktor-Dissertation sein, die ich über die weiteren Untersuchungen der Kármánschen Wirbelstraße anfertige. Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Prandtl, nach dessen Idee (die spezielle Art der Störung) und unter dessen Leitung ich gearbeitet habe, möchte ich auch an dieser Stelle meinen tiefempfundenen Dank aussprechen.

1. Aufstellung der Differentialgleichungen. — Wir gehen von den bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} u_i = \dfrac{d x_i}{d t} = -\dfrac{\Gamma}{2\pi} \sum_k \dfrac{y_i - y_k}{r_{ik}^2}, \qquad v_i = \dfrac{d y_i}{d t} = \dfrac{\Gamma}{2\pi} \sum_k \dfrac{x_i - x_k}{r_{ik}^2} \\ r_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

aus, deren linke Seiten die Projektionen der Geschwindigkeit irgendeines Wirbels (x_i, y_i) von den k Wirbeln (x_k, y_k), die sie ihm mitteilen, darstellen. Der Einfachheit halber und zum bequemeren Vergleich wählen wir das Koordinatensystem OXY so, daß das System von Wirbelpunkten, in welchen sich die zueinander parallelen Wirbelfäden mit der Richtung OZ, mit der XY-Ebene schneiden — d. h. die Kármánsche Wirbelstraße — symmetrisch in bezug auf den Anfang O liegt. Wir drücken zu diesem Zweck die Koordinaten der k Wirbel der oberen, bzw. der unteren Reihe, durch die Formel

$$x_k' = l\,(2\,k + 1/2),\; y_k' = h\,,\; x_k'' = l\,(2\,k - 1/2),\; y_k'' = -h \;(k = -\infty \cdots + \infty) \; . \; . \; . \; (2)$$

aus. Aus den letzten Formeln läßt sich ersehen, daß das Anfangswirbelpaar $(l/2, h)$, $(-l/2, -h)$ sich für $k = O$ ergibt, und daß die Wirbel in jeder der beiden Reihen den Abstand $2\,l$ haben, während die Breite der Straße $2\,h$ ist. Jetzt wird die Projektion der Geschwindigkeit in der Richtung OX des i-ten Wirbels z. B. der oberen Reihe

$$U + \dot{x}_i' = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \frac{y_i' - y_k}{(x_i' - x_k)^2 + (y_i' - y_k)^2}, \qquad \dot{y}_i' = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \frac{x_i' - x_k}{(x_i' - x_k)^2 + (y_i' - y_k)^2} \quad (1\,\text{a}).$$

Der Index (′) bezeichnet die obere Reihe; der Index (″) soll dann die untere Reihe bezeichnen. Die Koordinaten x_k, y_k ohne obere Indizes zeigen an, daß es sich um Wirbel beider Reihen handelt, die auf den i-ten Wirbel der oberen Reihe wirken, für den die Gl. (1a) angegeben sind. U bedeutet die totale Geschwindigkeit der Straße ebenfalls in der Richtung OX.

Bei einer beliebigen Störung des Wirbelsystems, bei der die Wirbel um die kleinen Größen $\bar{x}_k', \bar{y}_k'$ in der ersten Reihe und um $\bar{x}_k'', \bar{y}_k''$ in der zweiten verschoben werden, nehmen die Koordinaten der k Wirbel in beiden Reihen die Form

$$x_k' = l\,(2\,k + 1/2) + \bar{x}_k',\; y_k' = h + \bar{y}_k',\; x_k'' = l\,(2\,k - 1/2) + \bar{x}_k'',\; y_k'' = -h + \bar{y}_k'' \quad . \; . \; (2')$$

an. Setzen wir diese Werte in (1a) ein, indem wir die Wirkung der k schon gestörten Wirbel auf den auch gestörten Wirbel (x_i', y_i') zuerst von der oberen und dann von der unteren Reihe nacheinander ausdrücken, und indem wir im letzteren Fall das "—" Vorzeichen vor Γ nehmen, so bekommen wir

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2\pi}{\Gamma}(U + \dot{\bar{x}}_i') = -\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}{}'_k \frac{\bar{y}_i' - \bar{y}_k'}{[(\bar{x}_i' - \bar{x}_k') + 2\,l\,(i-k)]^2 + (\bar{y}_i' - \bar{y}_k')^2} \\[2ex] \qquad + \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \frac{\bar{y}_i' - \bar{y}_k'' + 2\,h}{[(\bar{x}_i' - \bar{x}_k'') - l\,(2\,k - i - 1)]^2 + [(\bar{y}_i' - \bar{y}_k'') + 2\,h]^2} \end{array}\right\} \; . \; . \; (1\,\text{b}),$$

wobei das Zeichen (′) in der ersten Summe den Summanden mit dem Index $i = k$ ausschließt. Wir nehmen jetzt an, daß das bisher Gemachte sich nicht auf den i-ten, sondern auf den O-ten Wirbel $(i = O)$ bezieht, und erstrecken unsere Betrachtungen nicht nur auf die Glieder erster, sondern auch auf solche zweiter Ordnung der Verschiebungen $\bar{x}_0', \bar{y}_0'$; $\bar{x}_0'', \bar{y}_0''$. Dann lautet die letzte Gl. (1b), in der jetzt $\frac{\Gamma}{2\pi} t = t$ sein möge, ohne den Querstrich der Koordinaten geschrieben, folgendermaßen:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_0' + \dfrac{2\pi}{\Gamma} U = -\dfrac{1}{4\,l^2} \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{y_0' - y_k'}{k^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{h\,l\,(k - 1/2)\,(x_0' - x_k'')}{2\,[l^2\,(k - 1/2)^2 + h^2]^2} \\[2ex] \quad + \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{[l^2\,(k - 1/2)^2 - h^2]\,(y_0' - y_k'')}{4\,[l^2\,(k - 1/2)^2 + h^2]^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{2\,[l^2\,(k - 1/2)^2 + h^2]} \\[2ex] \quad + \dfrac{h}{8} \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{[3\,l^2\,(k - 1/2)^2 - h^2]\,(x_0' - x_k'')^2}{[l^2\,(k - 1/2)^2 + h^2]^3} - \frac{h}{8} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{[3\,l^2\,(k - 1/2)^2 - h^2]\,(y_0' - y_k'')^2}{[l^2\,(k - 1/2)^2 + h^2]^3} \\[2ex] \quad + \dfrac{l}{4} \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{[l^2\,(k - 1/2)^2 - 3\,h^2]\,(k - 1/2)\,(x_0' - x_k'')\,(y_0' - y_k'')}{[l^2\,(k - 1/2)^2 + h^2]^3} - \frac{1}{4\,l^3} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(x_0' - x_k')\,(y_0' - y_k')}{k^3} \end{array}\right\} \; (3).$$

Es läßt sich zunächst zeigen, daß

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa}{(k-1/2)^2+\varkappa^2} = \pi\, \mathfrak{Tg}\, \varkappa \pi, \qquad U = \frac{\Gamma}{4\, l}\, \mathfrak{Tg}\, \varkappa \pi, \qquad (\varkappa = h/l),$$

wie es die unsymmetrische Anordnung verlangt. Weiterhin haben wir

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\varkappa\,(k-1/2)}{[(k-1/2)^2+\varkappa^2]^2} = 0, \qquad {\sum_{-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(k-1/2)^2-\varkappa^2}{[(k-1/2)^2+\varkappa^2]^2} = \frac{\pi^2}{\mathfrak{Cof}^2\, \varkappa \pi}.$$

Setzen wir, der Kürze halber, noch

$$\frac{\pi^2}{4\, l^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\, \varkappa \pi} - \frac{1}{3}\right) = a, \qquad \frac{1}{4\, l^2}\,\frac{1}{k^2} = b_k, \qquad \frac{1}{2\, l^2}\,\frac{\varkappa\,(k-1/2)}{[(k-1/2)^2+\varkappa^2]^2} = c_k, \qquad \frac{1}{4\, l^2}\,\frac{(k-1/2)^2-\varkappa^2}{[(k-1/2)^2+\varkappa^2]^2} = d_k;$$

$$\frac{1}{8\, l^3}\,\frac{\varkappa\,[3\,(k-1/2)^2-\varkappa^2]}{[(k-1/2)^2+\varkappa^2]^3} = \alpha_k, \qquad \frac{1}{8\, l^3}\,\frac{[(k-1/2)^2-3\,\varkappa^2]\,(k-1/2)}{[(k-1/2)^2+\varkappa^2]^3} = \beta_k, \qquad \frac{1}{8\, l^3}\,\frac{1}{k^3} = \varrho_k,$$

wobei wir die Summen über k von $-\infty$ bis $+\infty$ über die letzten Ausdrücke mit $b, c, d;\ \alpha, \beta, \varrho$ bezeichnen. Es ist leicht zu sehen, daß $c = 0,\ \beta = 0,\ \varrho = 0$. Wenn wir mit diesen Bezeichnungen die Glieder von (3) und die Summen nach den Koordinaten $x_0', y_0';\ x_k', y_k';\ x_k'', y_k''$ ordnen, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0' = {} & a\, y_0' + \Sigma'\, b_k\, y_k' - \Sigma\, c_k\, x_k'' - \Sigma\, d_k\, y_k'' + \alpha\,(x_0'^2 - y_0'^2) - 2\, x_0' \,\Sigma\, \alpha_k\, x_k'' \\ & + 2\, y_0' \,\Sigma\, \alpha_k\, y_k'' + \Sigma\, \alpha_k\, x_k''^2 - \Sigma\, \alpha_k\, y_k''^2 - 2\, x_0' \,\Sigma\, \beta_k\, y_k'' - 2\, y_0' \,\Sigma\, \beta_k\, x_k'' \\ & + 2\,\Sigma\, \beta_k\, x_k''\, y_k'' + 2\,(x_0' \,\Sigma'\, \varrho_k\, y_k' + y_0' \,\Sigma'\, \varrho_k\, x_k' - \Sigma'\, \varrho_k\, x_k'\, y_k') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3').$$

Die den übrigen Koordinaten der Geschwindigkeit $\dot{y}_0';\ \dot{x}_0'', \dot{y}_0''$ entsprechenden Ausdrücke bekommen wir auf dieselbe Weise, indem wir nur auf gewisse Vorzeichenänderungen infolge der Zirkulation Γ, welche bei Wirbeln der unteren Reihe $-\Gamma$ sein wird, und infolge der Vertauschung von $k - 1/2$ mit $k + 1/2$ bei der unteren Reihe achten; (das letztere ist nur bei dem speziellen Störungsgesetz gestattet, welches wir bald einführen werden). Nach allen Ausrechnungen gelangen wir auf folgendes quadratisches System von vier Differentialgleichungen mit unendlich vielen unbekannten Funktionen der Zeit t:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0' = {} & a\, y_0' + \Sigma'\, b_k\, y_k' - \Sigma\, c_k\, x_k'' - \Sigma\, d_k\, y_k'' \\ & + \alpha\,(x_0'^2 - y_0'^2) + \Sigma\, \alpha_k\, x_k''^2 - \Sigma\, \alpha_k\, y_k''^2 - 2\,(x_0' \,\Sigma\, \alpha_k\, x_k'' - y_0' \,\Sigma\, \alpha_k\, y_k'') \\ & - 2\,(x_0' \,\Sigma\, \beta_k\, y_k'' + y_0' \,\Sigma\, \beta_k\, x_k'' - \Sigma\, \beta_k\, x_k''\, y_k'') \\ & + 2\,(x_0' \,\Sigma'\, \varrho_k\, y_k' + y_0' \,\Sigma'\, \varrho_k\, x_k' - \Sigma'\, \varrho_k\, x_k'\, y_k') \\ \dot{y}_0' = {} & a\, x_0' + \Sigma'\, b_k\, x_k' + \Sigma\, c_k\, y_k'' - \Sigma\, d_k\, x_k'' \\ & - 2\, a\, x_0'\, y_0' + 2\,(x_0' \,\Sigma\, \alpha_k\, y_k'' + y_0' \,\Sigma\, \alpha_k\, x_k'' - \Sigma\, \alpha_k\, x_k''\, y_k'') \\ & - 2\,(x_0' \,\Sigma\, \beta_k\, x_k'' - y_0' \,\Sigma\, \beta_k\, y_k'') + \Sigma\, \beta_k\, x_k''^2 - \Sigma\, \beta_k\, y_k''^2 \\ & + 2\,(x_0' \,\Sigma'\, \varrho_k\, x_k' - y_0' \,\Sigma'\, \varrho_k\, y_k') - \Sigma'\, \varrho_k\, x_k'^2 + \Sigma'\, \varrho_k\, y_k'^2 \\ \dot{x}_0'' = {} & -a\, y_0'' - \Sigma'\, b_k\, y_k'' + \Sigma\, c_k\, x_k' + \Sigma\, d_k\, y_k' \\ & + \alpha\,(x_0''^2 - y_0''^2) + \Sigma\, \alpha_k\, x_k'^2 - \Sigma\, \alpha_k\, y_k'^2 - 2\,(x_0'' \,\Sigma\, \alpha_k\, x_k' - y_0'' \,\Sigma\, \alpha_k\, y_k') \\ & - 2\,(x_0'' \,\Sigma\, \beta_k\, y_k' + y_0'' \,\Sigma\, \beta_k\, x_k' - \Sigma\, \beta_k\, x_k'\, y_k') \\ & + 2\,(x_0'' \,\Sigma'\, \varrho_k\, y_k'' + y_0'' \,\Sigma'\, \varrho_k\, x_k'' - \Sigma'\, \varrho_k\, x_k''\, y_k'') \\ \dot{y}_0'' = {} & -a\, x_0'' - \Sigma'\, b_k\, x_k'' - \Sigma\, c_k\, y_k' + \Sigma\, d_k\, x_k' \\ & - 2\, a\, x_0''\, y_0'' + 2\,(x_0'' \,\Sigma\, \alpha_k\, y_k' + y_0'' \,\Sigma\, \alpha_k\, x_k' - \Sigma\, \alpha_k\, x_k'\, y_k') \\ & - 2\,(x_0'' \,\Sigma\, \beta_k\, x_k' - y_0'' \,\Sigma\, \beta_k\, y_k') + \Sigma\, \beta_k\, x_k'^2 - \Sigma\, \beta_k\, y_k'^2 \\ & + 2\,(x_0'' \,\Sigma'\, \varrho_k\, x_k'' - y_0'' \,\Sigma'\, \varrho_k\, y_k'') - \Sigma'\, \varrho_k\, x_k''^2 + \Sigma'\, \varrho_k\, y_k''^2 \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Für $i = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \pm \infty$ bekommen wir im allgemeinen ein System von unendlich vielen Differentialgleichungen von der Ordnung $4 \times \infty$, dessen Auflösung uns die Bewegung aller unendlich vielen gestörten Wirbel bringen wird. Die Aufgabe besteht jetzt darin, das unendliche System auf ein endliches zu reduzieren. Aus den einzelnen Summanden der rechten Seiten der Gl. (4) folgt offensichtlich, daß die dazu geeignete Methode aus dem Gesetz der Störung zu finden ist. Bekanntlich hat Kármán[4]) das letztere durch das allgemeinste periodische Gesetz der Störung getan. Da wir die Stabilität der Wirbelstraße zu bestätigen suchen, und zwar bei denjenigen Fällen, bei denen Instabilität behauptet wird, so wird das von uns angewandte Störungsgesetz dasselbe sein wie das, welches von den besprochenen Autoren benutzt worden ist.

2. Gleiche Störung der Wirbel. — Bevor wir zu dem allgemeineren Teil unserer Aufgabe kommen, wollen wir zunächst folgende ganz spezielle und einfache Störung betrachten. Wir nehmen an, daß alle Wirbel jeder Reihe gleich gestört werden (aber in den beiden Reihen anders), d. h. daß sie im Verlauf der Zeit kongruente Bahnen beschreiben werden. Diese Störung wollen wir „gleich" nennen und drücken sie symbolisch folgendermaßen aus:

$$\begin{cases} \mathfrak{r}_k'(x_k', y_k') = \mathfrak{r}'(x', y') \\ \mathfrak{r}_k''(x_k'', y_k'') = \mathfrak{r}''(x'', y'') \end{cases} \qquad (\mathfrak{r}' \neq \mathfrak{r}'').$$

Da wir damit die Bewegung nur zweier Wirbel betrachten, wird das System (4) nur vier Unbekannte enthalten. Es ist sogar noch einfacher und lautet

$$\begin{cases} \dot{x}' = \lambda(y' - y'') + a[(x' - x'')^2 - (y' - y'')^2] = \dot{x}'' \\ \dot{y}' = \lambda(x' - x'') - 2a[(x' - x'')(y' - y'')] = \dot{y}'' \end{cases},$$

wobei

$$\lambda = a + b = d = \frac{\pi^2}{4l^2}\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 \varkappa\pi}, \qquad a = \frac{\pi^3}{8l^3}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa\pi}{\mathfrak{Cos}^3 \varkappa\pi}.$$

Durch einmaliges Differenzieren bekommen wir

$$\ddot{x}' = 0, \quad \ddot{y}' = 0; \qquad \ddot{x}'' = 0, \quad \ddot{y}'' = 0,$$

und daraus die Lösungen

$$\begin{cases} x' = \dot{x}_0' t + x_0' \\ y' = \dot{y}_0' t + y_0' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \dot{x}'' t + x_0'' \\ y'' = \dot{y}_0'' t + y_0'' \end{cases},$$

wobei jetzt der Index „0" Anfangsbedingungen bezeichnet. Wegen $\dot{x}_0' = \dot{x}_0''$, $\dot{y}_0' = \dot{y}_0''$ bekommen wir endgültig

$$\begin{cases} x' = \{\lambda(y_0' - y_0'') + a[(x_0' - x_0'')^2 - (y_0' - y_0'')^2]\}\, t + x_0' \\ y' = \{\lambda(x_0' - x_0'') - 2a(x_0' - x_0'')(y_0' - y_0'')\}\, t + y_0' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \{\cdots\}\, t + x_0'' \\ y'' = \{\cdots\}\, t + y_0'' \end{cases}.$$

Die linearen Glieder allein der letzten Gleichungen entsprechen der Störung erster Ordnung.

Wir wollen nun die mechanische Bedeutung sowohl der eingeführten gleichen Störung der Wirbel, als auch des gefundenen Bewegungsgesetzes zeigen. Wenn $y_0' \neq 0, y_0'' \neq 0$, erzeugen wir eine Verbreiterung oder Verengerung der Straße. Abb. 1 entspricht $x' \neq 0$,

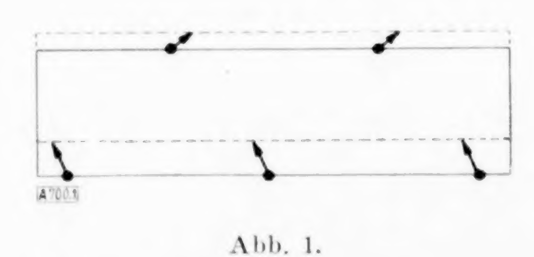


Abb. 1.

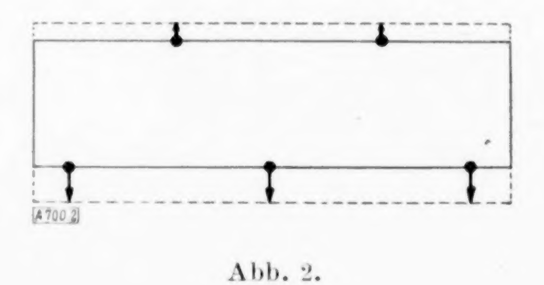


Abb. 2.

$x_0'' \neq 0$, (Fall I) Abb. 2 — $x_0' = 0 = x_0''$ (Fall II). Da die gefundenen Lösungen als Trajektorien jedes Wirbels der oberen bzw. unteren Reihe Geraden mit gleicher Neigung gegen die OX-Achse geben, so ist der Effekt dieser Änderung der Breite der Wirbelstraße eine Ablenkung der ganzen Konfiguration gegen die ursprüngliche Richtung der Bewegung, ohne daß dadurch

[4]) Th. v. Kármán: „Über den Mechanismus usw.", Gött. Nachr., 1912, S. 547.

die Anordnung der Wirbel gestört wird. Während der ganzen Zeit nach den Anfangsverschiebungen bleibt die Breite der Straße fast diejenige, die durch die Anfangsordinaten bestimmt wird. Die minimale Ablenkung der Straße tritt im Fall II ein; sie ist dann null und die Straße erfährt nur eine positive oder negative Änderung ihrer Geschwindigkeit U, je nach den Anfangsstörungen, welche Änderung übrigens, wegen der geringen Anfangsstörungsgrößen, ganz schwach ist. Die maximale Ablenkung der Straße tritt bei dem Fall III (Abb. 3: $y_0' = 0 = y_0''$), bei dem die Breite der Straße nicht geändert wird. Bei Störungen erster Ordnung ist die Neigung $= \pi/2$, und die Geschwindigkeit $V = \pm \lambda (x_0' - x_0'')$. Dann ist die Ablenkung in Richtung des Vektors $(W) = (U) + (V)$.

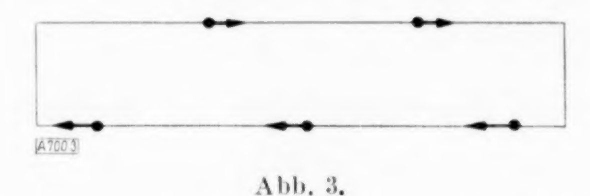


Abb. 3.

Folglich gibt die gleiche Störung lediglich eine schräge Fortbewegung der Straße, aber keine Stabilitätsbedingung. Die Instabilität, welche Durand findet, wegen der Glieder, die mit dem Anwachsen der Zeit unendlich werden, kommt also in der Tat nicht vor. Wenn man von Instabilität sprechen will, so besteht diese nur in der gezeigten Ablenkung der ganzen Konfiguration aus ihrer ursprünglichen Lage, nicht aber in einer Änderung der Wirbel in ihr, was die eigentliche Aufgabe ist. Solange die Wirbel einer und derselben Reihe nicht gegeneinander gestört werden, behält die Straße ihre Anordnung.

Daraus sieht man klar das indifferente Gleichgewicht der Kármánschen Straße. Man kann in diesem Verhalten einen Grund dafür sehen, daß die durch das Experiment gefundenen Werte für das Verhältnis h/l nicht genau 0,281 ... sind.

Diese instruktive Eigenschaft der gleichen Störung, bei welcher die Anordnung der Wirbel selbst nicht gestört wird, wird sich als wichtig für unsere späteren Betrachtungen erweisen.

3. Alternative Störung der Wirbel. — Als etwas allgemeinere Art Störung, die die Auflösung des Systems (4) noch ermöglicht, bei der aber doch eine Stabilitätsbedingung herauskommt, wählen wir folgende: Wir setzen voraus, daß jeder zweite Wirbel beider Reihen, ausgehend von dem nullten nach rechts und links (die „geraden" Wirbel), eine und dieselbe (aber in beiden Reihen eine andere) Verschiebung erfährt. Genau so verfahren wir mit den übrigen (den „ungeraden") Wirbeln. Bei dieser Störung, welche wir „alternativ" nennen, erhalten wir ein System von $4 \times 2 = 8$ Differentialgleichungen. Um es anzuschreiben, geben wir dem Koordinatenindex k nur die Bedeutungen 0 und 1. Nun soll es zu dem System (4), welches die kongruenten Bahnen der geraden Wirbel (Index 0) in jeder Reihe bestimmt, ein analoges System entsprechend den ungeraden Wirbeln (Index 1) hinzugefügt werden. Dieses ergibt sich, wenn wir schon in der Gl. (1b) den Index $i = 1$ einsetzen. Die erste der vier Gleichungen dieses neuen Systems lautet:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1' = a\, y_1' &+ \Sigma' b_{1k} y_k' - \Sigma c_{1k} x_k'' - \Sigma d_{1k} y_k'' \\ &+ a\,(x_1'^2 - y_1'^2) + \Sigma \alpha_{1k} x_k''^2 - \Sigma \alpha_{1k} y_k''^2 - 2(x_1' \Sigma \alpha_{1k} x_k'' - y_1' \Sigma \alpha_{1k} y_k'') \\ &- 2\,(x_1' \Sigma \beta_{1k} y_k'' + y_1' \Sigma \beta_{1k} x_k'' - \Sigma \beta_{1k} x_k'' y_k'') \\ &+ 2\,(x_1' \Sigma' \varrho_{1k} y_k' + y_1' \Sigma' \varrho_{1k} x_k' - \Sigma' \varrho_{1k} x_k' y_k') \\ \dot{y}_1' = \ldots; \quad \dot{x}_1'' &= \ldots, \quad \dot{y}_1'' = \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5).$$

Auch bei diesem System nimmt der Index k der Koordinaten nur die Werte 0 und 1 an. Wir haben also die Lösung des Systems von Differentialgleichungen (4), (5) achter Ordnung mit den Unbekannten $x_0', y_0'; x_1', y_1'; x_0'', y_0''; x_1'', y_1''$ zu finden. Die Gestalt dieses Systems zeigt uns das einfache lineare System, das den Störungen erster Ordnung entspricht.

Als zweckmäßigstes Verfahren zur Auflösung erweist sich das folgende: Wir addieren und subtrahieren einfach die linken und rechten Seiten der Gl. (4) und (5). Nachdem wir die Summen in solche für gerade und ungerade Bedeutungen des Index k zerlegen, ist es leicht, die Gültigkeit der folgenden Eigenschaften nachzuprüfen. Einerseits:

$$\sum_0 d_k = \sum_1 d_k, \; \sum_0 c_k = -\sum_1 c_k; \quad \sum_0 \alpha_k = \sum_1 \alpha_k = \frac{a}{2}, \; \sum_0 \beta_k = -\sum_1 \beta_k, \; \sum_0{}' \varrho_k = \sum_1{}' \varrho_k = 0;$$

andererseits, wenn e irgendwelche von den Ausdrücken $b, c, d; \varrho, \alpha, \beta$ bedeutet

$$\sum_0 e_k = \sum_1 e_{1k}, \; \sum_0 e_{1k} = \sum_1 e_k \cdot \left(\sum_0 - k = \text{gerade}, \; \sum_1 - k = \text{ungerade}\right).$$

Außerdem setzen wir noch für die berechneten Summen

$$a+\sum_0{}' b_k - \sum_1{}' b_k = \frac{\pi^2}{4\,l^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,\varkappa\,\pi}-\frac{1}{2}\right)=\mu,\quad 2\sum_1 c_k=\frac{\pi^2}{4\,l^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\varkappa\,\pi}{\mathfrak{Cof}^2\,\varkappa\,\pi}=\nu;$$

$$2\sum_0 \beta_k=\frac{\pi^3}{8\,l^3}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\,\varkappa\,\pi-1}{\mathfrak{Cof}^3\,\varkappa\,\pi}=\beta.$$

So bekommen wir:

für die Summen der Koordinaten

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_0'+\dot{x}_1' &= \lambda\,[(y_0'+y_1')-(y_0''+y_1'')]+\alpha\,[(x_0'^2+x_1'^2)-(y_0'^2+y_1'^2)+(x_0''^2+x_1''^2)\\
&\quad -(y_0''^2+y_1''^2)-(x_0'+x_1')\,(x_0''+x_1'')+(y_0'+y_1')\,(y_0''+y_1'')]\\
&\quad -\beta\,[(x_0'-x_1')\,(y_0''-y_1'')+(y_0'-y_1')\,(x_0''-x_1'')]=\dot{x}_0''+\dot{x}_1''\\
y_0'+\dot{y}_1' &= \lambda\,[(x_0'+x_1')-(x_0''+x_1'')]-\alpha\,[2\,(x_0'\,y_0'+x_1'\,y_1'+x_0''\,y_0''+x_1''\,y_1'')\\
&\quad -(x_0'+x_1')\,(y_0''+y_1'')-(x_0''+x_1'')\,(y_0'+y_1')]\\
&\quad -\beta\,[(x_0'-x_1')\,(x_0''-x_1'')-(y_0'-y_1')\,(y_0''-y_1'')]=\dot{y}_0''+\dot{y}_1''
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6);$$

für ihre Differenzen

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_0'-\dot{x}_1' &= \mu\,(y_0'-y_1')+\nu\,(x_0''-x_1'')\\
&\quad +\alpha\,[(x_0'^2-x_1'^2)-(y_0'^2-y_1'^2)-(x_0'-x_1')\,(x_0''+x_1'')+(y_0'-y_1')\,(y_0''+y_1'')]\\
&\quad +\beta\,[2\,(x_0''\,y_0''-x_1''\,y_1'')-(x_0'+x_1')\,(y_0''-y_1'')-(y_0'+y_1')\,(x_0''-x_1'')]\\
\dot{y}_0'-\dot{y}_1' &= \mu\,(x_0'-x_1')-\nu\,(y_0''-y_1'')\\
&\quad -\alpha\,[2\,(x_0'\,y_0'-x_1'\,y_1')-(x_0'-x_1')\,(y_0''+y_1'')-(y_0'-y_1')\,(x_0''+x_1'')]\\
&\quad +\beta\,[(x_0''^2-x_1''^2)-(y_0''^2-y_1''^2)-(x_0''-x_1'')\,(x_0'+x_1')+(y_0''-y_1'')\,(y_0'+y_1')]\\
\dot{x}_0''-\dot{x}_1'' &= -\mu\,(y_0''-y_1'')-\nu\,(x_0'-x_1')\\
&\quad +\alpha\,[(x_0''^2-x_1''^2)-(y_0''^2-y_1''^2)-(x_0''-x_1'')\,(x_0'+x_1')+(y_0''-y_1'')\,(y_0'+y_1')]\\
&\quad +\beta\,[2\,(x_0'\,y_0'-x_1'\,y_1')-(x_0''+x_1'')\,(y_0'-y_1')-(y_0''+y_1'')\,(x_0'-x_1')]\\
\dot{y}_0''-\dot{y}_1'' &= -\mu\,(x_0''-x_1'')+\nu\,(y_0'-y_1')\\
&\quad -\alpha\,[2\,(x_0''\,y_0''-x_1''\,y_1'')-(x_0''-x_1'')\,(y_0'+y_1')-(y_0''-y_1'')\,(x_0'+x_1')]\\
&\quad +\beta\,[(x_0'^2-x_1'^2)-(y_0'^2-y_1'^2)-(x_0'-x_1')\,(x_0''+x_1'')+(y_0'-y_1')\,(y_0''+y_1'')]
\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

a) Störungen erster Ordnung. — Wir wollen mit der Auflösung der Systeme (6) und (7) anfangen, indem wir uns zuerst nur auf die linearen Glieder beschränken, d. h. auf den Fall der Störungen erster Ordnung. Die Gl. (6), die sich in diesem Fall durch die Eigenschaften

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_0'+\dot{x}_1'=\dot{x}_0''+\dot{x}_1'', && \dot{y}_0'+\dot{y}_1'=\dot{y}_0''+\dot{y}_1''\\
\text{oder}\quad &x_0'+x_1'-(x_0''+x_1'')=C_1, && y_0'+y_1'-(y_0''+y_1'')=C_2
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

auszeichnen, führen zu den Gleichungen

$$\begin{cases} x_0'+x_1'=\lambda\,C_2\,t+C_1' \\ y_0'+y_1'=\lambda\,C_1\,t+C_2' \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0''+x_1''=\lambda\,C_2\,t+C_1'' \\ y_0''+y_1''=\lambda\,C_1\,t+C_2'' \end{cases}$$

als Lösungen des Systems (6), nachdem es linearisiert ist.

Wenn wir die Anfangsstörungen $\bar{x}_0', \bar{y}_0'$; $\bar{x}_1', \bar{y}_1'$; $\bar{x}_0'', \bar{y}_0''$; $\bar{x}_1'', \bar{y}_1''$ einführen, finden wir für $t=0$ die Konstanten

$$C_1'=\bar{x}_0'+\bar{x}_1',\; C_2'=\bar{y}_0'+\bar{y}_1';\quad C_1''=\bar{x}_0''+\bar{x}_1'',\; C_2''=\bar{y}_0''+\bar{y}_1''$$

und

$$C_1=\bar{x}_0'+\bar{x}_1'-(\bar{x}_0''+\bar{x}_1''),\quad C_2=\bar{y}_0'+\bar{y}_1'-(\bar{y}_0''+\bar{y}_1'') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8').$$

Damit ergibt sich die endgültige Auflösung in der Form

$$\left.\begin{aligned}&\begin{cases}x_0'+x_1'=\lambda\,[(\overline{y}_0'+\overline{y}_1')-(\overline{y}_0''+\overline{y}_1'')]\,t+\overline{x}_0'+\overline{x}_1'\\ y_0'+y_1'=\lambda\,[(\overline{x}_0'+\overline{x}_1')-(\overline{x}_0''+\overline{x}_1'')]\,t+\overline{y}_0'+\overline{y}_1'\end{cases}\\ &\begin{cases}x_0''+x_1''=\lambda\,[(\overline{y}_0'+\overline{y}_1')-(\overline{y}_0''+\overline{y}_1'')]\,t+\overline{x}_0''+\overline{x}_1''\\ y_0''+y_1''=\lambda\,[(\overline{x}_0'+\overline{x}_1')-(\overline{x}_0''+\overline{x}_1'')]\,t+\overline{y}_0''+\overline{y}_1''\end{cases}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Jetzt gehen wir zu dem linearen System für die Differenzen über. Es lautet:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_0'-\dot{x}_1'&=\mu\,(y_0'-y_1')+\nu\,(x_0''-x_1'') & \dot{x}_0''-\dot{x}_1''&=-\mu\,(y_0''-y_1'')-\nu\,(x_0'-x_1')\\ \dot{y}_0'-\dot{y}_1'&=\mu\,(x_0'-x_1')-\nu\,(y_0''-y_1'') & \dot{y}_0''-\dot{y}_1''&=-\mu\,(x_0''-x_1'')+\nu\,(y_0'-y_1')\end{aligned}\right\}\ldots (7').$$

Wenn wir es einmal differenzieren und umrechnen, so geht es in das System zweiter Ordnung über:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_0'-\ddot{x}_1'&=(\mu^2-\nu^2)\,(x_0'-x_1')-2\,\mu\,\nu\,(y_0''-y_1'')\\ \ddot{y}_0'-\ddot{y}_1'&=(\mu^2-\nu^2)\,(y_0'-y_1')+2\,\mu\,\nu\,(x_0''-x_1'')\\ \ddot{x}_0''-\ddot{x}_1''&=(\mu^2-\nu^2)\,(x_0''-x_1'')-2\,\mu\,\nu\,(y_0'-y_1')\\ \ddot{y}_0''-\ddot{y}_1''&=(\mu^2-\nu^2)\,(y_0''-y_1'')+2\,\mu\,\nu\,(x_0'-x_1')\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (7'a).$$

Dieses System differenzieren wir noch zweimal, wodurch wir unter Benutzung von (7'a) die eine für alle vier Unbekannten geltende Differentialgleichung vierter Ordnung erhalten, die für x lautet:

$$\frac{d^4}{dt^4}(x_0'-x_1')=2\,(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2}{dt^2}(x_0'-x_1')-(\mu^2+\nu^2)^2\,(x_0'-x_1')\quad\ldots\ldots (7'b).$$

Die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung, nämlich der biquadratischen Gleichung

$$z^4-2\,(\mu^2-\nu^2)\,z^2+(\mu^2+\nu^2)^2=0$$

sind:

$$z_1=\mu+i\,\nu,\qquad z_2=\mu-i\,\nu,\qquad z_3=-(\mu+i\,\nu),\qquad z_4=-(\mu-i\,\nu),$$

so daß das allgemeine Integral der Gl. (7'b) wird:

$$x_0'-x_1'=A_1\,e^{(\mu+i\nu)\,t}+B_1\,e^{(\mu-i\nu)\,t}+C_1\,e^{-(\mu+i\nu)\,t}+D_1\,e^{-(\mu-i\nu)\,t},$$

anders geschrieben

$$x_0'-x_1'=e^{\mu t}(M_1\cos\nu\,t+N_1\sin\nu\,t)+e^{-\mu t}(P_1\cos\nu\,t+Q_1\sin\nu\,t).$$

Für $y_0'-y_1'$, $x_0''-x_1''$, $y_0''-y_1''$ erhalten wir genau dieselbe Art Lösungen nur mit anderen Integrationskonstanten $M_i, N_i;\ P_i, Q_i$ $(i=2,3,4)$. Indem wir alle diese Konstanten für $t=0$ durch die Anfangsverschiebungen ausdrücken, gelangen wir zur endgültigen Lösung des Systems (7'), nämlich

$$\left.\begin{aligned}x_0'-x_1'&=e^{\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'+\overline{y}_0'-\overline{y}_1'}{2}\cos\nu\,t+\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''-(\overline{y}_0''-\overline{y}_1'')}{2}\sin\nu\,t\right]\\ &+e^{-\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'-(\overline{y}_0'-\overline{y}_1')}{2}\cos\nu\,t+\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''+\overline{y}_0''-\overline{y}_1''}{2}\sin\nu\,t\right]\\ y_0'-y_1'&=e^{\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'+\overline{y}_0'-\overline{y}_1'}{2}\cos\nu\,t+\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''-(\overline{y}_0''-\overline{y}_1'')}{2}\sin\nu\,t\right]\\ &-e^{-\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'-(\overline{y}_0'-\overline{y}_1')}{2}\cos\nu\,t+\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''+\overline{y}_0''-\overline{y}_1''}{2}\sin\nu\,t\right]\\ x_0''-x_1''&=e^{\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''-(\overline{y}_0''-\overline{y}_1'')}{2}\cos\nu\,t-\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'+\overline{y}_0'-\overline{y}_1'}{2}\sin\nu\,t\right]\\ &+e^{-\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''+\overline{y}_0''-\overline{y}_1''}{2}\cos\nu\,t-\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'-(\overline{y}_0'-\overline{y}_1')}{2}\sin\nu\,t\right]\\ y_0''-y_1''&=e^{\mu t}\left[-\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''-(\overline{y}_0''-\overline{y}_1'')}{2}\cos\nu\,t+\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'+\overline{y}_0'-\overline{y}_1'}{2}\sin\nu\,t\right]\\ &+e^{-\mu t}\left[\frac{\overline{x}_0''-\overline{x}_1''+\overline{y}_0''-\overline{y}_1''}{2}\cos\nu\,t-\frac{\overline{x}_0'-\overline{x}_1'-(\overline{y}_0'-\overline{y}_1')}{2}\sin\nu\,t\right]\end{aligned}\right\}\ .\ (10).$$

Wir setzen jetzt

$$a' = \frac{\overline{x}_0' - \overline{x}_1' + \overline{y}_0' - \overline{y}_1'}{2}, \qquad b' = \frac{\overline{x}_0' - \overline{x}_1' - (\overline{y}_0' - \overline{y}_1')}{2},$$

$$a'' = \frac{\overline{x}_0'' - \overline{x}_1'' + \overline{y}_0'' - \overline{y}_1''}{2}, \qquad b'' = \frac{\overline{x}_0'' - \overline{x}_1'' - (\overline{y}_0'' - \overline{y}_1'')}{2}.$$

Durch Addieren und Subtrahieren der Gl. (9) und (10) erhalten wir die folgenden Gesetze der Störungsbewegungen der vier Wirbel von den ersten zwei Paaren als Vertreter der Bewegungen aller unendlich vielen Wirbel

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
x_0' = \dfrac{\overline{x}_0' + \overline{x}_1'}{2} + \dfrac{\lambda}{2} C_2 t + \dfrac{1}{2}\left[e^{\mu t}(a' \cos \nu t + b'' \sin \nu t) + e^{-\mu t}(b' \cos \nu t + a'' \sin \nu t)\right] \\
y_0' = \dfrac{\overline{y}_0' + \overline{y}_1'}{2} + \dfrac{\lambda}{2} C_1 t + \dfrac{1}{2}\left[e^{\mu t}(a' \cos \nu t + b'' \sin \nu t) - e^{-\mu t}(b' \cos \nu t + a'' \sin \nu t)\right]
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
x_0'' = \dfrac{\overline{x}_0'' + \overline{x}_1''}{2} + \dfrac{\lambda}{2} C_2 t + \dfrac{1}{2}\left[e^{\mu t}(b'' \cos \nu t - a' \sin \nu t) + e^{-\mu t}(a'' \cos \nu t - b' \sin \nu t)\right] \\
y_0'' = \dfrac{\overline{y}_0'' + \overline{y}_1''}{2} + \dfrac{\lambda}{2} C_1 t - \dfrac{1}{2}\left[e^{\mu t}(b'' \cos \nu t - a' \sin \nu t) - e^{-\mu t}(a'' \cos \nu t - b' \sin \nu t)\right]
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
x_1' = \cdots - \dfrac{1}{2}[\cdots] \\
y_1' = \cdots - \dfrac{1}{2}[\cdots]
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l}
x_1'' = \cdots - \dfrac{1}{2}[\cdots] \\
y_1'' = \cdots + \dfrac{1}{2}[\cdots]
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (11).$$

Aus der Diskussion der letzten Gleichungen sieht man, daß mit dem Anwachsen der Zeit t keine Glieder unendlich groß werden, wenn zunächst der Potenzkoeffizient $\mu = 0$ ist, d. h. wieder die Kármánsche Stabilitätsbedingung

$$\mathfrak{Cof}\, \varkappa \pi = \sqrt{2}, \qquad \varkappa = h/l = 0{,}281 \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

erfüllt ist. Die Anwesenheit der Glieder mit t in erster Potenz hat nämlich Durand den Anlaß gegeben, neben (12) noch weitere Bedingungen zu verlangen. Da $\lambda \neq 0$ ist, fordert er

$$C_1 = \overline{x}_0' + \overline{x}_1' - (\overline{x}_0'' + \overline{x}_1'') = 0, \qquad C_2 = \overline{y}_0' + \overline{y}_1' - (\overline{y}_0'' + \overline{y}_1'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und schließt, daß die Bedingung (12) allein zur Stabilität der Straße nicht nur unzureichend ist, sondern daß die Straße überhaupt instabil ist. Aus der Gestalt der Gl. (11) erfahren wir aber sofort, daß die Störungsbewegungen der Wirbel aus zwei verschiedenen Bewegungen bestehen: einer geradlinig gleichförmigen und einer zusammengesetzt-oszillatorischen. Die Geschwindigkeit der ersteren dieser Bewegungen ist außerdem der Größe und Richtung nach gleich für die beiden Reihen; ihre Projektionen sind nämlich proportional C_1 und C_2. Infolgedessen verursacht die Anwesenheit dieser Glieder keine Versetzung der Wirbel eines Paares, außer, wie bei der gleichen Störung der Wirbel, einer schwachen Ablenkung der ganzen Straße aus ihrer ursprünglichen Richtung. Mit anderen Worten haben die in t linearen Glieder, die mit der Zeit unendlich werden, den Charakter einer Translation des Wirbelsystems. Das Nichtverschwinden der Koeffizienten C_1 und C_2 (C_2 kann übrigens, wie wir bald sehen werden, durch geeignete Definition immer zu Null gemacht werden) beeinflußt die Stabilität der Anordnung gar nicht.

Die einzige notwendige Stabilitätsbedingung ist infolgedessen die Kármánsche (12), welche auch bei der betrachteten Gruppenstörung erster Ordnung herauskommt. Es ist leicht zu erkennen, daß sich mit der Vergrößerung der Anzahl der Wirbel in jeder Gruppe unsere Art von alternativer Störung jede allgemeinste harmonische Störung mit beliebiger Wellenlänge angenähert erzeugen kann.

b) Störungen zweiter Ordnung. — Wir wollen jetzt zu den totalen nichtlinearen Systemen (6) und (7) zurückkehren, um unsere Betrachtungen bei Störungen zweiter Ordnung fortzusetzen. Zunächst formen wir die Gl. (6) wie folgt um:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_0' + \dot{x}_1' = \dot{x}_0'' + \dot{x}_1'' = \lambda\, C_2 + \frac{\alpha}{2}\,(C_1^2 - C_2^2) \\
+ \frac{\alpha}{2}\,[(x_0' - x_1')^2 - (y_0' - y_1')^2 + (x_0'' - x_1'')^2 - (y_0'' - y_1'')^2] \\
- \beta\,[(x_0' - x_1')\,(y_0'' - y_1'') + (x_0'' - x_1'')\,(y_0' - y_1')] \\
\dot{y}_0' + \dot{y}_1' = \dot{y}_0'' + \dot{y}_1'' = \lambda\, C_1 + \alpha\, C_1\, C_2 \\
- \alpha\,[(x_0' - x_1')\,(y_0' - y_1') + (x_0'' - x_1'')\,(y_0'' - y_1'')] \\
- \beta\,[(x_0' - x_1')\,(x_0'' - x_1'') - (y_0' - y_1')\,(y_0'' - y_1'')]
\end{aligned}\right\}\quad (6')$$

und ähnlich (7)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_0' - \dot{x}_1' &= (\mu - C_2\,\alpha)\,(y_0' - y_1') + (\nu - C_2\,\beta)(x_0'' - x_1'') + C_1\,[\alpha\,(x_0' - x_1') - \beta\,(y_0'' - y_1'')] \\
\dot{y}_0' - \dot{y}_1' &= (\mu - C_2\,\alpha)\,(x_0' - x_1') - (\nu - C_2\,\beta)\,(y_0'' - y_1'') - C_1\,[\beta\,(x_0'' - x_1'') + \alpha\,(y_0' - y_1')] \\
\dot{x}_0'' - \dot{x}_1'' &= -(\mu - C_2\,\alpha)\,(y_0'' - y_1'') - (\nu - C_2\,\beta)\,(x_0' - x_1') - C_1\,[\alpha\,(x_0'' - x_1'') - \beta\,(y_0' - y_1')] \\
\dot{y}_0'' - \dot{y}_1'' &= -(\mu - C_2\,\alpha)\,(x_0'' - x_1'') + (\nu - C_2\,\beta)\,(y_0' - y_1') + C_1\,[\beta\,(x_0' - x_1') + \alpha\,(y_0'' - y_1'')]
\end{aligned}\right\}\quad (7'').$$

Das letzte wieder lineare System gleicht sehr dem System (7′) vom vorigen Abschnitt a). Man sieht sofort, daß (7″) mit (7′) übereinstimmen wird, sobald die beiden Konstanten C_1 und C_2 gleich null sind. Wir nehmen für den Augenblick an, daß diese ungleich null sind.

Die Systeme (6′) und (7″) zeigen uns, daß die Lösungen wieder stark von den Konstanten C_1 und C_2 abhängen werden. Dadurch wird also, wie zu erwarten ist, auch die gesuchte Bedingung der Stabilität von C_1 und C_2 abhängen. Da uns die Lösung des Systems (7″) gleich gelingen wird (man sieht, daß sie analog der des Systems (7′) ist) und das System (6′) seinerseits nur Differenzen, d. h. die Lösungen des Systems (7″) als Funktionen von t enthält, so finden wir unschwer auch die Lösungen des Systems (6′).

Setzen wir in das System (7″)

$$\mu - C_2\,\alpha = \tau, \qquad \nu - C_2\,\beta = \sigma, \qquad C_1\,\alpha = \alpha', \qquad C_1\,\beta = \beta' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14),$$

so kommen wir nach demselben Verfahren wie vorher gleich zu

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_0' - \ddot{x}_1' &= (\tau^2 - \sigma^2 + \alpha'^2 - \beta'^2)\,(x_0' - x_1') - 2\,(\tau\,\sigma + \alpha'\,\beta')\,(y_0'' - y_1'') \\
\ddot{y}_0' - \ddot{y}_1' &= (\tau^2 - \sigma^2 + \alpha'^2 - \beta'^2)\,(y_0' - y_1') + 2\,(\tau\,\sigma + \alpha'\,\beta')\,(x_0'' - x_1'') \\
\ddot{x}_0'' - \ddot{x}_1'' &= (\tau^2 - \sigma^2 + \alpha'^2 - \beta'^2)\,(x_0'' - x_1'') - 2\,(\tau\,\sigma + \alpha'\,\beta')\,(y_0' - y_1') \\
\ddot{y}_0'' - \ddot{y}_1'' &= (\tau^2 - \sigma^2 + \alpha'^2 - \beta'^2)\,(y_0'' - y_1'') + 2\,(\tau\,\sigma + \alpha'\,\beta')\,(x_0' - x_1')
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (7''\text{a})$$

und daraus, mit den Bezeichnungen

$$\tau^2 - \sigma^2 + \alpha'^2 - \beta'^2 = \gamma, \qquad \tau\,\sigma + \alpha'\,\beta' = \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15),$$

zu

$$\frac{d^4}{d\,t^4}(x_0' - x_1') = 2\,\gamma\,\frac{d^2}{d\,t^2}(x_0' - x_1') - (\gamma^2 + 4\,\delta^2)\,(x_0' - x_1') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7''\text{b}).$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind

$$z_s = \pm\,\sqrt{\gamma \pm 2\,i\,\delta} \quad (s = 1, 2, 3, 4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

Nun lautet das allgemeine Integral der Gl. (7″b) folgendermaßen:

$$x_0' - x_1' = A_1\,e^{z_1 t} + B_1\,e^{z_2 t} + C_1\,e^{z_3 t} + D_1\,e^{z_4 t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Analog sind die Ausdrücke für die übrigen Differenzen, wobei jetzt die Integrationskonstanten A_s, B_s, C_s, D_s $(s = 2, 3, 4)$ auftreten.

Nachdem wir die bei dieser allgemeinsten Lösung, d. h. für $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, gefundenen Differenzen (17) in die Gl. (6′) einsetzen, kommen nur Integrale von der Form $\int e^{(z_i + z_j)\,t}\,d\,t$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ vor.

Bei der Untersuchung der Stabilität ist es deshalb hinreichend, nur die Lösungen (17) zu behandeln. Die anderen Glieder in den Lösungen von (6′), welche t enthalten, außer den Exponentialfunktionen in t, verursachten, wie gezeigt, nur eine Translation der ganzen Straße.

4. Stabilität. — Untersuchen wir also die Wurzeln z. Damit in (17) nicht unendliche Glieder auftreten, genügt es, daß $\Re z_s$ gleich null oder eine negative Zahl ist. Wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzeln (16) und da γ und δ reell sind, folgt, daß von den besprochenen Forderungen nur die Bedingungen

$$\delta = 0, \qquad \gamma < 0, \text{ oder von (15): } \tau\sigma + \alpha'\beta' = 0, \; \tau^2 - \sigma^2 + \alpha'^2 - \beta'^2 < 0 \quad . \; . \quad (18)$$

gleichzeitig erfüllt sein müssen. Wenn wir jetzt die Bezeichnungen (14) wieder einführen und beachten, daß $\alpha = \nu\sqrt{\lambda}, \beta = -\mu\sqrt{\lambda}$, bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} (\mu^2 - \nu^2)[1 - \lambda(C_1{}^2 + C_2{}^2)] - 4\, C_2 \sqrt{\lambda}\,\mu\nu < 0 \\ \mu\nu[1 - \lambda(C_1{}^2 + C_2{}^2)] + C_2\sqrt{\lambda}(\mu^2 - \nu^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19),$$

dabei werden C_1 und C_2 durch (8') gegeben.

So lauten also die Stabilitätsbedingungen der Wirbelstraße bei Störungen zweiter Ordnung. Aus diesen sieht man vor allem sofort, daß die die Wirbelanordnung kennzeichnende Größe $\varkappa = h/l$, für die irgendein bestimmter von den Störungen unabhängiger Wert gefunden werden muß, als Funktion der willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 erscheinen wird. Daraus folgt aber, daß das Gleichgewicht der Straße nur relativ sein wird, d. h. nur gegenüber gewissen ganz speziellen Störungen gesichert ist.

In der Tat, genügt es vorauszusetzen, daß $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, um gleichzeitig die obigen Bedingungen, die dann zu

$$\tau = \mu - C_2\nu\sqrt{\lambda} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

führen, zu erfüllen. Die Deutung dieser Formel ist die, daß jede Straße mit gegebenen h' stabil wäre, sobald sie mit solchen Anfangsverschiebungen gestört wird, für die $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{\mu(h'/l)}{\nu(h'/l)\sqrt{\lambda(h'/l)}}$. Genügt C_2 nicht der Gl. (20) bei gegebenen h, so wäre die betrachtete Straße instabil. Z. B. würde die Kármánsche stabile Straße mit der Anordnung $h/l = 0{,}281$ bei $C_2 \neq 0$ zu der unmöglichen Gleichung $-C_2 \dfrac{\pi^3}{16\sqrt{2}\,l^3} = 0$ führen.

Im Gegensatz dazu, führt die Voraussetzung $C_2 = 0$ auf Grund von (19) immer zu $\mu = 0$ ($\mathfrak{Cof}\,\varkappa\pi = \sqrt{2}$) und, falls $C_1 \neq 0$, zu $|C_1| < 0{,}9\,l$ (was nach unserer Annahme kleiner Störungen von selbst erfüllt ist), d. h. aber zu der alten Bedingung.

Folglich würde man, abhängig davon, ob die Anfangsverschiebung $C_2 = 0$ oder $C_2 \neq 0$ ist, zwei entgegengesetzte Effekte bekommen: im ersten Fall die Kármánsche Stabilität, im zweiten nur relative, d. h. allgemein Instabilität. Dementsprechend wollen wir nun mit Schmieden sagen, daß wir im ersten Fall „Störungen erster Art“, im zweiten „Störungen zweiter Art“ haben. Der Einfachheit halber, und ohne die Allgemeinheit zu zerstören, nehmen wir in beiden Fällen $C_1 = 0$ an.

Wir wollen jetzt, auf Grund von Abschnitt 3 und unter Berücksichtigung der hydrodynamischen Natur der Sache zeigen, daß sich die „zweite Art“ Störungen immer auf die erste reduziert und nur die Kármánsche Bedingung resultiert.

Die Bedeutung der Forderung $C_2 = \bar{y}_0' + \bar{y}_1' - (\bar{y}_0'' + \bar{y}_1'') \neq 0$ ist auch hier eine Verbreiterung oder Verengerung der Wirbelstraße. Die Abbildungen 4 und 5, die im wesentlichen nicht verschieden sind, stellen Störungen zweiter Art dar mit den Anfangsverschiebungen:

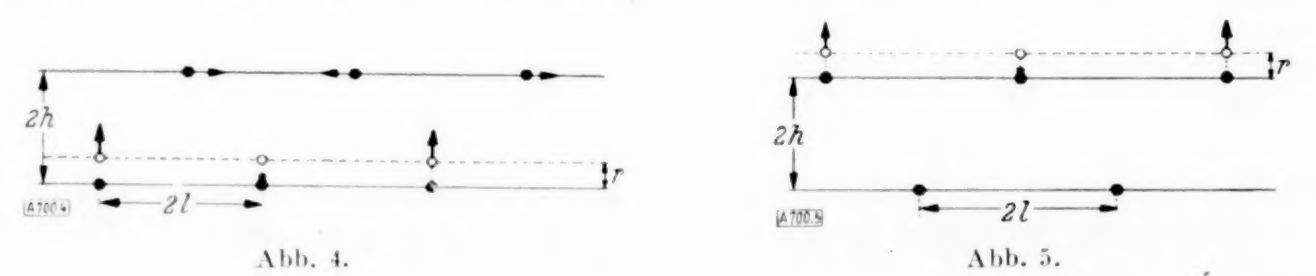


Abb. 4. Abb. 5.

4. $\bar{x}_0' = -\bar{x}_1', \bar{y}_0' = 0 = \bar{y}_1'$; $\bar{x}_0'' = 0 = \bar{x}_1'', \bar{y}_0'' = 2r, \bar{y}_1'' = 0$; 5. $\bar{x}_0' = 0 = \bar{x}_1', \bar{y}_0' = 2r, \bar{y}_1' = 0$; $\bar{x}_0'' = 0 = \bar{x}_1'', \bar{y}_0'' = 0 = \bar{y}_1''$. Jetzt ist $C_2 = \mp 2r$. Man hat nun als Anfangskonfiguration diejenige mit $\mathfrak{Cof}\,h/l\,\pi = \sqrt{2}$ genommen, die nach Kármán in bezug auf Störungen erster Ordnung stabil ist. Von dieser Konfiguration wurde behauptet, daß sie sich bei Störungen höherer Ordnung (in diesem Fall schon bei zweiter Ordnung) instabil erweisen würde; denn es würde dann eine Straße mit Störungen erster Art gestört, deren Breite $2h' = 2h + r$ ist, für welche also die Stabilitätsbedingung $\mathfrak{Cof}\,h'/l\,\pi = \sqrt{2}$ wäre, was der Voraussetzung nach nicht erfüllt sein kann.

In Wirklichkeit wird aber eben diese neue Straße, mit der Breite $2h'$ gestört. Die Störung zweiter Ordnung, angewandt auf die Straße mit der Breite $2h$, kann man in eine „gleiche“ Störung, welche die Breite um $\pm r$ ändert und, wie gezeigt, belanglos für die Stabilität ist, und in eine „alternative erster Art“, die zu der bekannten Stabilitätsbedingung zurückführt, zerlegen. Wenn dann $\mathfrak{Cof}\, h'/l\, \pi \neq \sqrt{2}$ ist, ist es selbstverständlich, daß Instabilität auftritt. Es ist aber nicht mehr die Kármánsche Anordnung, die sich als instabil erweist.

Auch die Unbestimmtheit der Gl. (20) ist damit erklärt. Nun bedeutet diese Gleichung, daß, wenn die Breite $2h_{II}$ (II — zweite Art, I — erste Art) mit $\tau = 0$ stabil ist, die Breite $2h_{II} \pm r$ stabil mit $\mu = 0$ ist. Aus dieser Identität sieht man, daß die Instabilität, welche Schmieden findet, sich nicht auf die Straße mit der Breite $2h_I$ (bei ihm ist sie also die Kármánsche), sondern auf eine andere mit Breite $2h_{II} \pm r$ bezieht.

Der Unterschied in den Effekten unserer zwei Störungstypen, der gleichen und der alternativen, erfordert also eine eindeutige Festlegung der Grundform der Straße. Solange eine Anfangsstörung die Breite der zwei Wirbelreihen ändert, was zu keinen Schlüssen über die Stabilität führt, darf man nicht von einer Ausgangslage sprechen, welche gestört worden ist. Von dem Augenblick an aber, von welchem die gegenseitige Störung der Wirbel jeder Reihe und damit auch eine Stabilitätsbedingung auftritt, hat man den Abstand $2h$ zwischen beiden Reihen zu fixieren.

Hydrodynamisch bedeutet das letzte folgendes: Die verschobenen Wirbel, etwa wie in den Abbildungen 4 und 5, verhalten sich so, daß sie nicht mehr zu dem Ort der unverschobenen zurückkehren und da oszillieren, sondern diese so beeinflussen, daß zum Schluß ein Oszillieren um eine neue Lage auftritt, die in jeder Reihe als „Schwerlinie“ aller Wirbel (verschobenen und unverschobenen) aufzufassen ist. Ist die eine Reihe ungestört geblieben (wie in der Abb. 5 die untere), so bleibt ihre Schwerlinie dieselbe, während die der anderen Reihe (der oberen) um $\pm r$ versetzt wird. Um nun von einer von vornherein gewählten Grundform gegenüber einer gestörten Form zu sprechen, muß diese eindeutig bestimmt werden. Eindeutigkeit ist also nur möglich, wenn $C_2 = 0$. Ist dann eine Ausgangskonfiguration bei gewisser Anfangsstörung gegeben, so können wir definieren: 2h ist der Abstand der Schwerlinie der Wirbel der oberen Reihe von der der unteren Reihe. Nach dieser Definition ist C_2 immer gleich null.

Folglich führen die Bedingungen (19), bei $C_2 = 0$, eindeutig nur zur Kármánschen Bedingung (12), und zwar auch bei Störungen zweiter Ordnung. Daraus leiten wir den die Kármánsche Ausführung bestätigenden Satz ab:

Wenn die Breite $2h$ der Grundform der Wirbelstraße so gewählt wird, daß $C_2 = 0$ ist, dann ist Stabilität vorhanden für $h/l = 0{,}281$.

Anmerkungen: I. Die von Schmieden gefundene Instabilität bezieht sich eigentlich nicht auf Störungen zweiter Ordnung, sondern auf beliebige (höhere als erster Ordnung). Der Beweis jedoch, den wir durchgeführt haben, um zu zeigen, daß diese Instabilität nur scheinbar ist, ist auch in diesem Fall maßgebend, da er nicht die Ordnung, sondern die Art der Störung betraf. Bei Schmieden ist $C_1 = 0$. Wäre $C_2 = 0$ (d. h. gegenseitige Störung der geraden und ungeraden Wirbel ohne Änderung der Breite der Straße), so hätte er bei seinen Störungen höherer Ordnung nicht das mitgeteilte Ergebnis bekommen. Wir haben zu den linearen Gliedern der Störung nur noch die quadratischen herangezogen, da schon dann die Konstanten C_1 und C_2 als Koeffizienten in den Potenzen der Exponentialfunktionen der Zeit t auftreten, wodurch unsere Betrachtung leicht zu dem gesuchten Resultat geführt hat. Es ist vorauszusehen, daß der Beitrag der Glieder höherer Ordnung ebenfalls nur die schräge Fortbewegung der Wirbelkonfiguration verursacht.

II. Die im Abschnitt 3a gezeigte Translation der Wirbelkonfiguration wird also verschwinden, wenn $C_1 = C_2 = 0$.

III. Nimmt man bei unserer Gruppenstörung mehr als zwei Wirbel in einer Gruppe an, wodurch nur die Wellenlänge der Störung geändert wird, so bekommt man wieder das Kármánsche Resultat, sobald die den Anfangsverschiebungen entsprechende Änderung der Breite der Straße eliminiert wird.

In einem weiteren Aufsatz beabsichtige ich den Einfluß der nichtlinearen Störungen auf die Bahnen der einzelnen Wirbel zu betrachten, sowohl für den stabilen, wie auch für den instabilen Fall; das letztere heißt also, falls $h/l \neq 0{,}281$ ist. 700

Zur Berechnung der Zylinderfunktionen mit reellem Index.

Von *Fritz Emde* in Stuttgart.

(Mitteilung aus dem Elektrot. Institut der Techn. Hochschule.)

Einer der größten Fortschritte der praktischen Mathematik in den letzten Jahrzehnten ist Debyes Erfindung seiner halbkonvergenten Reihen zur Berechnung der Zylinderfunktionen[1]). Da diese Reihen anders gebaut sind als die meisten bekannten und viel benutzten Reihen, so verdienen sie auch die Beachtung derer, die sie nicht zu Berechnungen benutzen wollen. Divergente Reihen, die konvergent anfangen, eignen sich für große Werte der Veränderlichen. Bei den Debyeschen Reihen genügt es, daß nur eine der beiden Veränderlichen groß ist; die andere kann beliebig klein sein. Anderseits zeigt es sich, daß die Debyeschen Reihen auch bei großen Werten beider Veränderlicher schlecht brauchbar werden können. Es ist daher nicht nur für Zahlenrechnungen wichtig, sondern auch reizvoll, das Anwendungsgebiet der Debyeschen Reihen richtig abzustecken, nicht zu weit und nicht zu eng. Es kommt vor, daß eine Debyesche Reihe in einem Bereich ihrer Veränderlichen eine andere Zylinderfunktion asymptotisch darstellt als in einem andern Bereich. Man wird die Gebietsgrenze bestimmen, an der die Reihe ihre Bedeutung wechselt, und untersuchen, wie weit sich dieser Bedeutungswechsel als unangenehme Störung geltend macht.

Nach einer kurzen allgemeinen Orientierung zeigen wir, wie die Debyeschen Reihen für verschiedene Zylinderfunktionen und für die verschiedenen Wertebereiche der Veränderlichen aus einer gemeinsamen Form dadurch entstehen, daß man den Veränderlichen nacheinander verschiedene Wege in der komplexen Ebene zuweist. Darauf schreiben wir die Debyeschen Reihen für die wenigen, praktisch fast allein vorkommenden Fälle an. Indem wir die Zahlenrechnung und die maßstäbliche Zeichnung als Aufklärungsmittel nicht verschmähen, erkennen wir mit Sicherheit, wo die Grenzen für die Brauchbarkeit der Reihen liegen und wie sich der erwähnte Bedeutungswechsel praktisch auswirkt.

In dem Zwischengebiet, wo die Debyeschen Reihen versagen, betrachten wir an einem Beispiel das Verhalten der Zylinderfunktionen in diesem Gebiet und die Formeln, die J. W. Nicholson und G. N. Watson hier als Ausweg ersonnen haben.

Wir werden annehmen, daß der Index der Zylinderfunktionen reell ist und daß sowohl der reelle wie der imaginäre Teil ihres Arguments positiv ist. Dadurch wird eine große Deutlichkeit und Bestimmtheit in der Darstellung des Sachverhalts ermöglicht. Ein Mangel an Einsicht ist damit nicht verbunden. Es macht keine Schwierigkeiten, auf andere Bereiche der Veränderlichen überzugehen.

I. Die zu berechnenden Funktionen. Paßintegrale. Nach A. Sommerfeld kann man die Zylinderfunktionen $Z_p(z)$ für komplexen Index p und komplexes Argument z durch Integrale in der komplexen Ebene definieren[2]). Dabei kommen die Integrationswege aus dem Unendlichen und laufen wieder ins Unendliche. Denkt man sich den Betrag des Integranden durch die Höhe der Punkte einer Fläche über der komplexen Ebene dargestellt[3]), so müssen

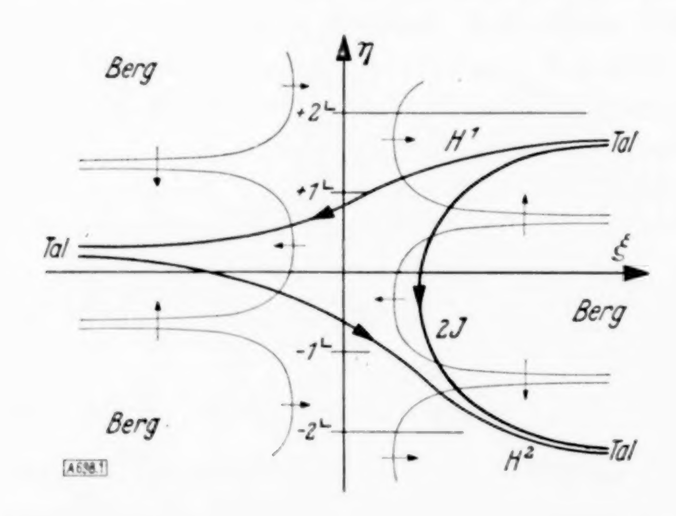


Abb. 1. Integrationswege für die Funktionen H^1, H^2, $2J$. Die dünnen Linien deuten ungefähr den Lauf der Höhenlinien an. Die Querpfeile weisen in Richtung des Gefälles.

[1]) P. Debye: Math. Ann. 67, 1909, S. 535; Bayer. Ak. 1910, 5. Abh. — G. N. Watson: Bessel functions, Cambridge 1922, S. 235 bis 270. — S. C. van Veen: Math. Ann. 97, 1927, S. 696. — C. S. Meijer: Math. Ann. 108, 1933, S. 321. — F. Emde u. R. Rühle, Jahresber. Deutsche Math. Ver. 45, 1934, S. 251. — R. Weyrich: Zylinderfunktionen, Leipzig 1937 bei Teubner, S. 49 bis 65. — Das neue Buch von Weyrich bietet eine bequeme und praktisch genügende Einführung in das Gebiet der Zylinderfunktionen. Auch findet man dort alle die theoretischen Herleitungen, die wir hier nicht wiederholen können.

[2]) Math. Ann. 47, S. 335 (1896).

[3]) Zeichnungen von solchen Flächen bei Jahnke und Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl., 1933, S. 216, 217.

die Integrationswege in Tälern ins Unendliche laufen, damit die Integrale nicht divergieren. Die Sommerfeldschen Integraldarstellungen lauten (in etwas anderer Form) für die beiden Hankelschen Funktionen und die Besselsche Funktion so (vgl. Abb. 1)[4]):

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\infty + i\pi}^{-\infty} e^{z \mathfrak{Sin}\,\zeta - p\zeta}\, d\zeta \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty - i\pi} e^{z \mathfrak{Sin}\,\zeta - p\zeta}\, d\zeta \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$H_p^{(1)}(z) + H_p^{(2)}(z) = 2 J_p(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\infty + i\pi}^{\infty - i\pi} e^{z \mathfrak{Sin}\,\zeta - p\zeta}\, d\zeta \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Der Integrand ist überall im Endlichen regulär, so daß die Integrationswege beliebig verschoben werden dürfen, wenn sie nur vorschriftsmäßig ins Unendliche laufen. Bei reellem und ganzem p hat der Integrand die Periode $2\pi i$.

Um aus diesen Integralen Reihen mit starker Anfangskonvergenz zu gewinnen, hat P. Debye den schönen Gedanken benutzt, den Integrationsweg im Endlichen so zu führen, daß er über einen oder mehrere Pässe der Betragsfläche des Integranden läuft und dort mit der Fall-Linie zusammenfällt, damit er möglichst steil wird. Denn man kann erwarten, daß das Wegstück über einen hohen steilen Paß schon allein fast den ganzen Integralwert liefert. Wir wollen nach diesem Grundgedanken zunächst einen rohen Näherungswert für eine der Funktionen suchen.

Zur Abkürzung setzen wir den Exponenten

$$z \mathfrak{Sin}\,\zeta - p\zeta = \Omega = \Phi + i\Psi \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

(Φ und Ψ reell). Die Punkte der Betragsfläche haben also die Höhe e^{Φ}. Die Grundrisse der Höhenlinien auf der Fläche haben die Gleichung $\Phi = \text{konst}$, die zu ihnen senkrechten Grundrisse der Fall-Linien die Gleichung $\Psi = \text{konst}$. Am Paß behält Ω seinen Wert: $d\Omega / d\zeta = z \mathfrak{Cof}\,\zeta - p = 0$. Der Paß liegt also über einem Punkt $\zeta = \pm\gamma$ der komplexen Ebene, für den $\mathfrak{Cof}\,\gamma = p/z$ ist. Wir setzen

$$z \mathfrak{Sin}\,\gamma - p\gamma = \Omega_0 = \Phi_0 + i\Psi_0 \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

ferner vorübergehend $\zeta = \gamma + e^{i\eta} h$, so daß $d\zeta = e^{i\eta}\, dh$ wird, wenn man auf einer bestimmten Geraden $\eta = \text{konst}$ bleibt. Dann ist

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 &= z\,[\mathfrak{Sin}(\gamma + e^{i\eta} h) - \mathfrak{Sin}\,\gamma] - p\, e^{i\eta} h \\ &= z\,[\mathfrak{Sin}\,\gamma\, \{\mathfrak{Cof}(e^{i\eta} h) - 1\} + \mathfrak{Cof}\,\gamma\, \mathfrak{Sin}(e^{i\eta} h)] - p\, e^{i\eta} h, \end{aligned}$$

oder mit

$$z \mathfrak{Sin}\,\gamma = s \quad \text{und} \quad z \mathfrak{Cof}\,\gamma = p, \quad \text{so daß} \quad z^2 = p^2 - s^2 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

wird,

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 &= s\,[\mathfrak{Cof}(e^{i\eta} h) - 1] + p\,[\mathfrak{Sin}(e^{i\eta} h) - e^{i\eta} h] \\ &\approx s\, \frac{1}{2} e^{i 2\eta} h^2 + p\, \frac{1}{6} e^{i 3\eta} h^3, \end{aligned}$$

also nach (5) und (6) mit

$$\Omega_0 = s - p\gamma = s\,(1 - \gamma\, \mathfrak{Ctg}\,\gamma) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\Omega \approx s\,(1 - \gamma\, \mathfrak{Ctg}\,\gamma) + \frac{1}{2} s\, h^2 e^{i 2\eta}.$$

Der Integrationsweg laufe nun über den Paß in einer solchen Richtung η, daß das veränderliche letzte Glied von Ω reell und negativ wird. Sei beispielsweise s reell und positiv, dann wählen wir $\eta = -\pi/2$, folglich $e^{i\eta} = i^{-1}$, und erhalten bei großem s annähernd

$$2 J_{s\, \mathfrak{Ctg}\,\gamma}(s / \mathfrak{Sin}\,\gamma) \approx e^{s\,(1 - \gamma\, \mathfrak{Ctg}\,\gamma)} \cdot \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} s h^2} \frac{dh}{i} = e^{s\,(1 - \gamma\, \mathfrak{Ctg}\,\gamma)} \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \quad \ldots \quad (8).$$

---

[4]) Näheres über die Entstehung dieser Integraldarstellungen in dem genannten Lehrbuch von Weyrich.

Dieser Ausdruck ist also ein Näherungswert für $2\,J_p(z)$, wenn p und z reell und positiv sind und wenn $z < p$ ist. Wie wir noch sehen werden, ist dazu weiter nötig, daß $s \gg \mathfrak{Ctg}^2\,\gamma > 1$ ist.

Wenn z groß gegen p wird, geht $\mathfrak{Cof}\,\gamma = p/z$ gegen Null, γ nähert sich dem Wert $\pm\, i\,\pi/2$, daher s und Ω_0 dem Wert $\pm\, i\,z$. Unser Ausdruck (8) geht in den über, der sich in erster Näherung aus den bekannten Hankelschen Reihen ergibt. Zugleich erkennt man, daß die Hankelschen Reihen nur dann brauchbar sind, wenn z nicht nur gegen 1, sondern auch gegen p groß ist.

Indem Debye die Näherung weiter trieb, erhielt er anfangskonvergente Reihen, die die Berechnung der Zylinderfunktionen sehr erleichtern, die aber auch durch ihren Bau sehr interessant sind. Auf die Ausrechnungen, die zu diesen Reihen führen, wollen wir hier nicht eingehen. Man findet sie z. B. in dem genannten Buch von R. Weyrich. Dagegen wollen wir die Debyeschen Reihen für die praktisch wichtigen Fälle in einer übersichtlichen und zugleich für die Zahlenrechnung bequemen Form anschreiben. Die praktisch wichtigen Fälle sind: $z = x$ reell, $z = i\,y$ rein imaginär und $z = r\sqrt{i}$ mit reellem r, dabei stets p reell.

II. Die Debyesche Funktion. Die Integrale (1), (2), (3) haben denselben Integranden und unterscheiden sich nur durch die Integrationswege. Man muß daher erwarten, daß auch die aus ihnen hervorgehenden Debyeschen Reihen formgleich werden. Um sie übersichtlich darzustellen, definieren wir deshalb eine „Debyesche Funktion" $\mathfrak{D}(w,\gamma)$ der beiden im allgemeinen komplexen Veränderlichen w und γ, und zwar nur in dem Bereich, in dem der Betrag von w groß ist sowohl gegen 1, wie gegen den Betrag von $\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma$. Im übrigen bleibt die Funktion unerklärt. In dem Definitionsbereich sei

$$\mathfrak{D}(w,\gamma) = w^{-\frac{1}{2}}\, e^{w\,(1-\gamma\,\mathfrak{Ctg}\,\gamma)} \left[B_0 + \frac{B_1(\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma)}{w} + \frac{B_2(\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma)}{w^2} + \cdots\right] \quad \ldots\ldots (9).$$

Die Reihe ist nur soweit zu benutzen, wie die Glieder abnehmen. Die Polynome B_m in $\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma$ haben die Form

$$B_m(\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot(2\,m-1)!!\,(C_{m,0} - C_{m,1}\,\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma + \cdots + (-1)^m\, C_{m,m}\,\mathfrak{Ctg}^{2m}\,\gamma) \quad . \quad (10),$$

wo die $C_{m,n}$ bestimmte Zahlen sind. Wichtig sind allein wenige der ersten B_m. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad B_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{8}\left(1 - \frac{5}{3}\,\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma\right),\\ B_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{3}{8^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{77}{9}\,\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma + \frac{385}{54}\,\mathfrak{Ctg}^4\,\gamma\right),\\ B_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{15}{8^3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1521}{50}\,\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma + \frac{17017}{270}\,\mathfrak{Ctg}^4\,\gamma - \frac{17017}{486}\,\mathfrak{Ctg}^6\,\gamma\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11).$$

Eine Rekursionsformel zur Berechnung weiterer B_m hat C. S. Meijer angegeben[5]). Setzt man $8^m\, C_{m,n} = D_{m,n}$ und $m + 2\,n + 2 = k$, so findet man nach Meijer

$$D_{m+1,\,n+1} = \frac{2\,k+1}{(2\,m+1)(k+1)}\left[(2\,k-3)\,D_{m,n} + (2\,k+1)\,D_{m,\,n+1}\right]$$

aus

$$D_{0,0} = 1, \qquad D_{m,-1} = D_{m,\,m+1} = 0 \qquad \begin{aligned}&(m = 0, 1, 2, \ldots)\\ &(n = -1, 0, 1, \ldots, m).\end{aligned}$$

Wenn der (im allgemeinen komplexe) $\mathfrak{Ctg}\,\gamma$ einen Betrag unter 1 hat, genügt für die Anfangskonvergenz der Reihe (9), daß w groß gegen 1 ist. Der letzte Summand jedes Reihengliedes enthält den Faktor $\left(\frac{\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma}{w}\right)^m$. Damit die Anfangsglieder der Reihe abnehmen, muß auch dieser Faktor klein genug sein, folglich w groß gegen das (vielleicht gegen 1 große) $\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma$. Anders ausgedrückt: Auch bei kleinem $\mathfrak{Tg}\,\gamma$ muß $w\,\mathfrak{Tg}^2\,\gamma$ noch groß gegen 1 sein. Eine für genauere Rechnungen genügende Anfangskonvergenz wird erst dann erreicht, wenn diese Größe etwa über 15 hinausgeht.

[5]) Math. Ann. 108, 1933, S. 323.

Wir bemerken noch, daß

$$\mathfrak{D}(w\, i^{\pm 4}) = -\mathfrak{D}(w) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}(-\gamma) = \mathfrak{D}(\gamma) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

ist. Wenn $\mathfrak{D}$ für gegebene Werte von z und p berechnet werden soll, so berechnet man zunächst $w = \sqrt{p^2 - z^2}$ und $\mathfrak{Cof}\, \gamma = p/z$.

Hiermit ist die Debyesche Funktion genügend erläutert. Aus ihr erhalten wir asymptotische Darstellungen der verschiedenen Zylinderfunktionen, indem wir den beiden unabhängigen Veränderlichen in ihren komplexen Ebenen bestimmte Wege (meist Geraden) zuweisen, wie das die folgende Tabelle für die praktisch wichtigen Fälle zeigt ($2\, i\, N = H^1 - H^2$).

w	γ	p	z	$\mathfrak{D}(w, \gamma) \sim$
s	α	$s\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha$	$x = \dfrac{s}{\mathfrak{Sin}\, \alpha} < p$	$2\, J_p(x)$
s	$\alpha - i\dfrac{\pi}{2}$	$s\, \mathfrak{Tg}\, \alpha$	$i\, y = i\, \dfrac{s}{\mathfrak{Cof}\, \alpha}$	$2\, J_p(i\, y)$
$s\, i^2$	$-\alpha$	$s\, \mathfrak{Ctg}\, \alpha$	$x = \dfrac{s}{\mathfrak{Sin}\, \alpha} < p$	$i N_p(x) \approx H_p{}^1(x)$
$s\, i^{-2}$	$\alpha - i\dfrac{\pi}{2}$	$s\, \mathfrak{Tg}\, \alpha$	$i\, y = i\, \dfrac{s}{\mathfrak{Cof}\, \alpha}$	$H_p{}^1(i\, y)$
$q\, i$	$i\, \beta$	$q \operatorname{ctg} \beta$	$x = \dfrac{q}{\sin \beta} > p$	$H_p{}^1(x)$
$q\, i^{-1}$	$-i\, \beta$	$q \operatorname{ctg} \beta$	$x = \dfrac{q}{\sin \beta} > p$	$H_p{}^2(x)$
$s\, i^{-\sigma}$	$\alpha + \dfrac{i}{2}(\mathfrak{Amp}\, 2\alpha - \pi)$	$s \sqrt{\dfrac{2}{\mathfrak{Ctg}^2\, \alpha + \mathfrak{Tg}^2\, \alpha}}$	$r\sqrt{i} = i^{0,5}\, s \sqrt{\dfrac{1 - \mathfrak{Tg}^4\, \alpha}{1 + \mathfrak{Tg}^4\, \alpha}}$	$2\, J_p(r\sqrt{i})$
$s\, i^{2-\sigma}$	$-\alpha - \dfrac{i}{2}(\mathfrak{Amp}\, 2\alpha - \pi)$			$H_p{}^1(r\sqrt{i})$
($\operatorname{ctg} \sigma = \mathfrak{Cof}\, 2\alpha$)				

Die Debyesche Funktion gibt asymptotisch den Integralwert über einen Paß. Für jedes neue Wertepaar p, z hat man eine neue Betragsfläche e^{Φ}. Innerhalb eines Periodenstreifens hat aber jede dieser Flächen zwei Pässe, einen bei $\zeta = +\gamma$, den andern bei $\zeta = -\gamma$. Für eine bestimmte Zylinderfunktion kann bei manchen Werten von z der Beitrag des einen Passes maßgebend sein, bei andern Werten von z der Beitrag des andern Passes. An den beiden Pässen hat $w = z\, \mathfrak{Sin}\, \gamma$ entgegengesetzt gleiche Werte, so daß auch $\mathfrak{D}$ an den beiden Pässen nicht denselben Wert hat. Daher entstehen Zweifel daran, ob unsere Tabelle die Werte der Zylinderfunktionen wirklich überall richtig angibt. Darauf kommen wir noch zurück (Abschnitt VIII).

III. Spezielle Debyesche Reihen. Für die Debyesche Funktion sind w und γ die passendsten unabhängigen Veränderlichen. Nimmt man p als reell an und setzt $z = r\, i^{\varrho}$ und $w = s\, i^{-\sigma}$, so sollen bei der Berechnung einer Reihe von Werten für eine Zylinderfunktion gewöhnlich p und ϱ konstant sein und nur r sich ändern. Um dennoch die Debyesche Funktion bequem schreiben zu können, betrachten wir s allein als willkürlich veränderlich und drücken r und σ durch p, ϱ, s aus. Aus dem Ansatz

$$s^2\, i^{-2\sigma} = p^2 - r^2\, i^{2\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und aus dem dazu konjugierten erhalten wir

$$z = r\, i^{\varrho} = i^{\varrho} \sqrt{p^2 \cos 2\,\varrho \pm \sqrt{s^4 - p^4 \sin^2 2\,\varrho}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

wobei das negative Vorzeichen nur bei Winkeln $\varrho < 0{,}5^{\llcorner}$ in Betracht kommt. Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{s^2}{\sin 2\,\varrho} = \frac{p^2}{\sin 2\,(\varrho + \sigma)} = \frac{r^2}{\sin 2\,\sigma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Hiernach kann man entweder σ aus p, ϱ, s oder s aus p, ϱ, σ berechnen. Mit wachsendem s strebt σ gegen $1^{\llcorner} - \varrho$. Die Abb. 2 zeigt in der Ebene der komplexen Veränderlichen $w = s\, i^{-\sigma}$ Kurven $r =$ konst. und Kurven $\varrho =$ konst. Führen wir neben γ noch $\gamma' = \gamma + i\,\pi/2$ ein, was sich als nützlich erweisen wird, so haben wir

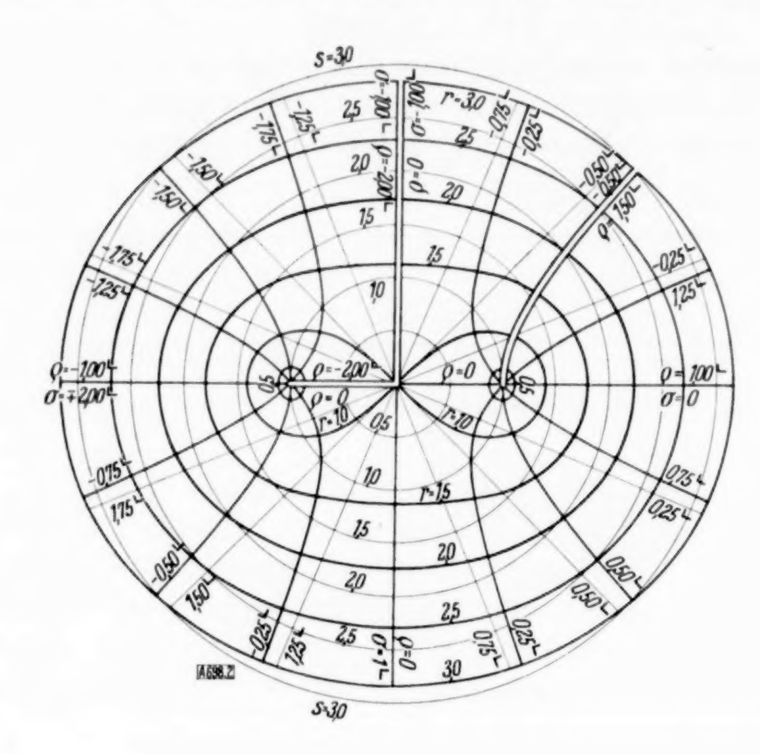


Abb. 2. Konforme Abbildung $\left(\frac{w}{p}\right)^2 + \left(\frac{z}{p}\right)^2 = 1$. Zahlenangaben allgemeingültig, Buchstaben nur für $p = 1$. (Pythagoras im Komplexen.)

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma = -i\,\mathfrak{Sin}\,\gamma' = \frac{p}{r}\,i^{-\varrho} \qquad (16a),$$

$$\mathfrak{Sin}\,\gamma = -i\,\mathfrak{Cof}\,\gamma' = \frac{s}{r}\,i^{-\varrho-\sigma} \qquad (16b),$$

$$\mathfrak{Ctg}\,\gamma = \mathfrak{Tg}\,\gamma' = \frac{p}{s}\,i^{\sigma} \qquad (16c).$$

Setzt man ferner

$$\gamma = \alpha + i\,\beta, \qquad \gamma' = \alpha + i\,\beta', \qquad \beta' = \beta + \frac{\pi}{2} \qquad (17),$$

so folgt aus (16)[6])

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{Cof}\,2\,\alpha\\ \cos 2\,\beta\end{matrix}\right\} = \frac{p^2 \pm s^2}{r^2} = \frac{p^2 \pm s^2}{p^2 \cos 2\,\varrho \pm \sqrt{s^4 - p^4 \sin^2 2\,\varrho}} \qquad (18),$$

$$= \cos 2\,\varrho \pm \sin 2\,\varrho\,(\mathrm{tg}\,\sigma)^{\mp 1} \qquad (18a).$$

Ferner ergibt sich nach (5), (6) und (16)

$$\frac{\Omega_0}{p} = \mathfrak{Tg}\,\gamma - \gamma = \mathfrak{Ctg}\,\gamma' - \gamma' + i\,\frac{\pi}{2} \qquad (19a),$$

wo γ nach (16) und (18) zu bestimmen ist, oder

$$\Omega_0 = w - p\,\gamma = w - p\,\gamma' + i\,p\,\frac{\pi}{2} \qquad (19b),$$

$$= w - p\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{w}{p} = w + i\,p\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{i\,w}{p} \qquad (19c),$$

$$= w - p\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{p}{w} + i\,p\,\frac{\pi}{2} = w + i\,p\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{i\,p}{w} + i\,p\,\frac{\pi}{2} \qquad (19d).$$

[6]) Funktionentafeln S. 61 oder R. Hawelka, Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen im Komplexen, 1931 beim Elektrotechnischen Verein, Berlin-Charlottenburg 4, Bismarckstr. 33II, S. 69. Viele der folgenden Rechnungen werden durch die Hawelkaschen Tafeln bedeutend erleichtert.

Wir wollen nur die drei Werte 0; $0{,}5^{\llcorner}$; $1^{\llcorner}$ des Winkels ϱ in Betracht ziehen:

A) $\varrho = 0$, **reelles Argument** $z = x = \sqrt{p^2 - s^2} < p$; $\sigma = 0$, $\beta = 0$, $\mathfrak{Tg}\, \alpha = s/p$, $-\Phi_0 = \Phi_0' = -s + p\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Tg} \frac{s}{p} > 0$, $\Psi_0 = 0$. Wenn $1 << s < p$ und $p^2 << s^3$ ist, so gelten folgende asymptotische Darstellungen:

$$2\, J_p(\sqrt{p^2 - s^2}) \sim \frac{e^{-\Phi_0'}}{\sqrt{s}} \left(B_0 + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} + \cdots \right) \quad \ldots \ldots \quad (20),$$

$$-N_p(\sqrt{p^2 - s^2}) \sim \frac{e^{\Phi_0'}}{\sqrt{s}} \left(B_0 - \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} - \cdots \right) \quad \ldots \ldots \quad (21),$$

$$J_{-p}(\sqrt{p^2 - s^2}) \sim -N_p(\sqrt{p^2 - s^2}) \cdot \sin p\pi \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Diese Reihen sind also nur bei großem Index p brauchbar. Sie stellen den „wellenfreien Anlauf“ der Zylinderfunktionen dar. Dagegen kann das Argument x sehr wohl klein werden, ohne daß die Reihen unbrauchbar werden.

B) $\varrho = 0$, **reelles Argument** $z = x = \sqrt{p^2 + s^2} > p$; $\sigma = \pm 1^{\llcorner}$, $\alpha = 0$, $\gamma = \pm i\beta$, $\operatorname{tg}\beta = s/p$, $\Phi_0 = 0$, $\pm\, \Psi_0 = p(\operatorname{tg}\beta - \beta)$. Wir setzen $s - p \cdot \operatorname{arctg} \frac{s}{p} - \frac{\pi}{4} = \varphi$.

Wenn $1 << s$ und $p^2 << s^3$ ist, gelten die folgenden asymptotischen Darstellungen:

$$J_p(\sqrt{p^2 + s^2}) \sim \frac{\cos\varphi}{\sqrt{s}} \left(B_0 - \frac{B_2}{s^2} + \frac{B_4}{s^4} - \cdots \right) + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{s}} \left(\frac{B_1}{s} - \frac{B_3}{s^3} + \cdots \right) \quad \ldots \quad (23),$$

$$J_{-p}(\sqrt{p^2 + s^2}) \sim \frac{\cos(\varphi - p\pi)}{\sqrt{s}} \left(B_0 - \frac{B_2}{s^2} + \cdots \right) + \frac{\sin(\varphi - p\pi)}{\sqrt{s}} \left(\frac{B_1}{s} - \frac{B_3}{s^3} + \cdots \right) \quad \ldots \quad (24),$$

$$N_p(\sqrt{p^2 + s^2}) \sim \frac{\sin\varphi}{\sqrt{s}} \left(B_0 - \frac{B_2}{s^2} + \cdots \right) - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{s}} \left(\frac{B_1}{s} - \frac{B_3}{s^3} + \cdots \right) \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Diese Reihen sind nur bei großem Argument x brauchbar. Sie zeigen den wellenartigen Gang der Zylinderfunktionen einer reellen Veränderlichen. Dagegen braucht der Index p hier nicht groß zu sein. Für $p = 0$ gehen diese Reihen in die bekannten Hankelschen über. Bei beliebigem p muß bei den Hankelschen Reihen x groß gegen p sein (das selbst wieder groß sein kann). Bei den Debyeschen Reihen braucht s nur groß gegen $p^{2/3}$ zu sein (etwa $> 2{,}5\, p^{2/3}$). Bei festem großem p und bei wachsendem x werden also die Debyeschen Reihen früher brauchbar als die Hankelschen.

C) $\varrho = 1^{\llcorner}$, **rein imaginäres Argument** $z = iy = i\sqrt{s^2 - p^2}$, $\sigma = 0$, $\beta = -1^{\llcorner}$, $\beta' = 0$, $\mathfrak{Tg}\, \alpha = p/s$, $\gamma = \alpha - i\pi/2$, $\Phi_0 = s - p\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Tg} \frac{p}{s}$, $\Psi_0 = p \frac{\pi}{2}$. Wenn $0 < p < s$, ferner $1 << s$ und $p^2 << s^3$ ist, so gelten die folgenden asymptotischen Darstellungen:

$$i^{-p}\, 2\, J_p(i\sqrt{s^2 - p^2}) \sim \frac{e^{\Phi_0}}{\sqrt{s}} \left(B_0 + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} + \cdots \right) \quad \ldots \ldots \quad (26),$$

$$i^{p+1}\, H_p^1(i\sqrt{s^2 - p^2}) \sim \frac{e^{-\Phi_0}}{\sqrt{s}} \left(B_0 - \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} - \cdots \right) \quad \ldots \ldots \quad (27).$$

Hieraus folgt auch die zweite Hankelsche Funktion nach der allgemein gültigen Beziehung $H^2 = 2J - H^1$. Doch ist hier H^1 klein gegen $2J$. Daher stellt (26) asymptotisch auch die folgenden Funktionen des Arguments $iy = i\sqrt{s^2 - p^2}$ dar:

$$i^{-p}\, H_p^2 \approx i^{-p-1}\, 2\, N_p \approx i^p\, 2\, J_{-p}.$$

Diese Reihen zeigen den wellenfreien Gang der Zylinderfunktionen rein imaginären Arguments. Wenn p klein ist, muß y groß sein. Bei großem p kann dagegen y auch klein werden. Auch diese Reihen gehen für $p = 0$ in die Hankelschen über.

D) $\varrho = 0{,}5^{-}$, **komplexes Argument** $z = r\sqrt{i} = (1+i)\,x = i^{0,5}\sqrt[4]{s^4 - p^4} = i^{0,5}\,p\sqrt{\operatorname{tg} 2\sigma}$; $p^2 = s^2 \cos 2\sigma$, $r^2 = s^2 \sin 2\sigma$, $0 < \sigma < 0{,}5^{-}$;

$$\cos 2\beta' = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha} = \sqrt{\frac{s^2 - p^2}{s^2 + p^2}} = \operatorname{tg}\sigma,$$

$$\mathfrak{Tg}^2\,\alpha = \operatorname{tg}^2\beta' = \frac{s^2 - \sqrt{s^4 - p^4}}{p^2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\sigma}{1 + \operatorname{tg}\sigma};$$

folglich ist $2\beta'$ die Hyperbelamplitude (der Gudermannsche Winkel) von 2α:

$$2\beta' = \mathfrak{Amp}\,2\alpha, \qquad \gamma = \alpha + i\,\frac{1}{2}\,\mathfrak{Amp}\,2\alpha - i\,\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{w}{p} = \frac{s\,i^{-\sigma}}{p} = \frac{1 - i\operatorname{tg}\sigma}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\sigma}} = \mathfrak{Ctg}\,2\alpha - i\operatorname{ctg} 2\beta',$$

$$w = s\,i^{-\sigma} = \sqrt{\frac{s^2 + p^2}{2}} - i\sqrt{\frac{s^2 - p^2}{2}},$$

$$\frac{\Phi_0}{p} = \mathfrak{Ctg}\,2\alpha - \alpha, \qquad -\frac{\Psi_0}{p} = \frac{\Psi_0'}{p} = \operatorname{ctg} 2\beta' + \beta' - \frac{\pi}{2} > 0,$$

$$\mathfrak{Ctg}^2\,\gamma = \frac{p^2}{w^2} = i^{2\sigma}\cos 2\varrho = \frac{p^2}{s^2}\,i^{2\sigma}.$$

Wenn $0 < p < s$, ferner $1 << s$ und $p^2 << s^3$ ist, so gelten die folgenden asymptotischen Darstellungen:

$$2\,J_p\left(i^{0,5}\sqrt[4]{s^4 - p^4}\right) \sim \frac{e^{\Phi_0}}{\sqrt{s}}\,e^{i\left(-\Psi_0' + \frac{1}{2}\sigma\right)}\left(B_0 + \frac{B_1}{s}\,e^{i\sigma} + \frac{B_2}{s^2}\,e^{i2\sigma} + \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

$$H_p^1\left(i^{0,5}\sqrt[4]{s^4 - p^4}\right) \sim \frac{e^{-\Phi_0}}{\sqrt{s}}\,e^{i\left(\Psi_0' + \frac{1}{2}\sigma - \frac{\pi}{2}\right)}\left(B_0 - \frac{B_1}{s}\,e^{i\sigma} + \frac{B_2}{s^2}\,e^{i2\sigma} - \cdots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Der reelle Teil von J_p ist eine anschwellende, von H_p^1 eine abschwellende Welle. Man kann diese Funktionen auch durch räumliche Spiralen darstellen (Funktionentafeln, S. 310 u. 318). Bei kleinem Index p sind die Reihen nur bei großem Argument r brauchbar; bei großem Index p dagegen auch bei kleinem r. Für $p = 0$ erhält man wieder die Hankelschen Reihen.

Die anfangskonvergente Reihe (9) schreitet fort nach negativen Potenzen von $w = \sqrt{p + z}\sqrt{p - z}$. Die eigentliche Stütze der Debyeschen Entwicklungen ist also die Abweichung des Arguments z vom Index p. In den angegebenen Reihen ist diese Abweichung groß. Für sehr kleine Abweichungen hat Debye andere Reihen aufgestellt. Da wir uns hier auf reelle Werte von p beschränken, kommen diese Reihen nur für reelle z in Betracht oder wenigstens nur für komplexe z mit kleinem Richtungswinkel ϱ. Sie lauten:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,J_p(p + \mathfrak{q}) \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,N_p(p + \mathfrak{q}) \end{array}\right\} \sim \frac{C_1}{r} \pm \frac{C_2\,\mathfrak{q}}{r^2} - \frac{C_4\,Q_4}{r^4} \mp \frac{C_5\,Q_5}{r^5} + \frac{C_7\,Q_7}{r^7} \pm \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

$$\left.\begin{array}{l} J_{-p}(p + \mathfrak{q}) \sim \dfrac{C_1}{r}\cos\left(p - \dfrac{1}{3}\right)\pi + \dfrac{C_2\,\mathfrak{q}}{r^2}\cos\left(p + \dfrac{1}{3}\right)\pi \\ \qquad + \dfrac{C_4\,Q_4}{r^4}\cos\left(p + \dfrac{2}{3}\right)\pi + \dfrac{C_5\,Q_5}{r^5}\cos\left(p - \dfrac{2}{3}\right)\pi + \cdots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (31).$$

Dabei ist $x = p + \mathfrak{q} = r^3$ gesetzt, ferner

$$Q_4 = \mathfrak{q}^3 - \frac{2}{5}\,\mathfrak{q}, \qquad Q_5 = \mathfrak{q}^4 - \mathfrak{q}^2 + \frac{3}{35}, \qquad Q_7 = \mathfrak{q}^6 - \frac{7}{2}\,\mathfrak{q}^4 + \frac{5}{2}\,\mathfrak{q}^2 - \frac{1}{5}\cdots,$$

$$C_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{6^{1/3}}{\left(-\frac{1}{3}\right)!} = 0{,}894\,615, \qquad C_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{6^{2/3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)!} = 0{,}821\,700,$$

$$C_4 = \frac{C_1}{3} = 0{,}298\,205, \qquad C_5 = \frac{C_2}{6} = 0{,}136\,950,$$

$$C_7 = \frac{C_1}{45} = 0{,}019\,830\,3, \qquad C_8 = \frac{2\,C_2}{315} = 0{,}005\,217\,15.$$

IV. Zahlenbeispiele für genügende und für ungenügende Anfangskonvergenz. Brauchbarkeitsgrenzen. Die Schnelligkeit, mit der der Anfang der Debyeschen Reihen konvergiert, hängt durchaus nicht in einfacher Weise von den beiden Veränderlichen ab. Daher findet man in der Literatur hierüber entweder nur ziemlich unbestimmte oder sogar irrige Angaben. Einerseits werden unnötige Bedingungen angegeben, anderseits nicht die wirklichen Brauchbarkeitsgrenzen. Durch einige Zahlenbeispiele gewinnt man am bequemsten einen Einblick in den verwickelten Sachverhalt. Vermutlich ist ein Einblick überhaupt nicht auf andere Weise zu erhalten. Unsere Beispiele werden sich fast durchweg auf die beiden Reihen (20) und (30) für die Funktion $2\,J_p(x)$ beziehen mit $x < p$. Wir werden nicht den Funktionswert ausrechnen, sondern in (20) den Faktor vor der Klammer weglassen und auch noch den Faktor $\sqrt{2/\pi}$ aus der Klammer herausziehen, so daß also das erste Glied in (20) gerade $= 1$ wird, wofür wir zur bequemern Übersicht über die Abnahme der Glieder 100 schreiben werden.

1. Beispiel: $p = 16$; $s = 10$, daraus $x = 12{,}49$; $-\mathfrak{q} = p - x = 3{,}51$; $\mathfrak{r} = \sqrt[3]{p} = 2{,}520$; $-\chi = -\mathfrak{q} : \mathfrak{r} = 1{,}393$; $s^3/p^2 = 3{,}91$; $p/s = 1{,}6$. Die Reihe (20) lautet hier:

$$100 - 4{,}087 + 1{,}235 - 0{,}733 + \cdots \approx 100 - 3{,}6\,.$$

Die Glieder nehmen also ziemlich langsam ab. Der Grund dafür ist, daß χ und s^3/p^2 zu kleine Werte haben. Etwa erst von $\chi = 3$ oder $s^3/p^2 = 15$ an werden die Debyeschen Reihen gut brauchbar. Daß sich das Übel nicht durch Vergrößerung von s beseitigen läßt, zeigt das folgende

2. Beispiel: $p = 500$; $s = 100$; $x = 489{,}9$; $-\mathfrak{q} = 10{,}1$; $\mathfrak{r} = 7{,}94$; $-\chi = 1{,}128$; $s^3/p^2 = 4$; $p/s = 5$. Die Reihe lautet:

$$100 - 5{,}08 + 1{,}99 - 1{,}49 + \cdots \approx 100 - 5\,.$$

Ein genügend großes χ oder s^3/p^2 bewirkt dagegen sofort schnelle Konvergenz:

3. Beispiel: $p = 200$; $s = 100$; $x = 173{,}2$; $-\mathfrak{q} = 26{,}8$; $\mathfrak{r} = 5{,}85$; $-\chi = 4{,}58$; $s^3/p^2 = 25$; $p/s = 2$. Die Reihe lautet:

$$100 - 0{,}709 + 0{,}038 - 0{,}003 \cdots \approx 100 - 0{,}674\,.$$

Wenn man die einzelnen Glieder genau genug ausrechnet, kann der relative Fehler ohne weiteres unter 10^{-5} herabgedrückt werden.

Ein verbreitetes Vorurteil ist, daß x und p groß sein müßten. Um das drastisch zu widerlegen, wählen wir ein Beispiel mit $x = 0$. Dann wird freilich $J_p(0) = 0$. Das geschieht aber in der Debyeschen Reihe dadurch, daß der Exponentialfaktor $= e^{-\infty}$ wird. Die Reihe in der Klammer kann dabei hervorragend gut konvergieren. Das sieht man an dem

4. Beispiel: $p = s = 100$; $x = 0$; $-\mathfrak{q} = 100$; $\mathfrak{r} = 4{,}64$; $-\chi = 21{,}55$; $s^3/p^2 = 100$; $p/s = 1$. Die Reihe lautet:

$$100 - 0{,}0833 + 0{,}000\,034\,7 + 0{,}000\,000\,27 \approx 100 - 0{,}0833\,.$$

Um zu zeigen, daß auch p nicht groß zu sein braucht, wählen wir nicht $p = 0$, weil dann die Debyesche Reihe in die Hankelsche übergeht, sondern

5. Beispiel: $p = 1$; $s = 10$; $x = 9{,}950$; $\mathfrak{q} = 8{,}95$; $\mathfrak{r} = 1$; $\chi = 8{,}95$; $s^3/p^2 = 1000$; $p/s = 0{,}1$. Da jetzt $s > p$ ist, geht die Reihe (20) in die Reihe (26) über:

$$100 + 1{,}229 + 0{,}0663 + 0{,}00645 \approx 100 + 1{,}302\,.$$

Auch hier wieder eine vortreffliche Konvergenz trotz $p = 1$.

Bisher war in unsern Beispielen $|\chi| > 1$. Wir geben jetzt ein Beispiel mit $|\chi| < 1$:

6. Beispiel: $p = 700$; $s = 100$; $x = 692{,}82$; $-\mathfrak{q} = 7{,}18$; $\mathfrak{r} = 8{,}88$; $-\chi = 0{,}809$; $s^3/p^2 = 2{,}04$; $p/s = 7$. Die Reihe lautet:

$$100 - 10{,}08 + 7{,}83\,(-11{,}62 + \cdots) \approx 100 - 2\,.$$

Die Reihe konvergiert sehr schlecht. Das vierte Glied übertrifft sogar schon das dritte und darf daher nicht mehr mitgenommen werden. Doch war es nicht verkehrt, hier bei $|\chi| < 1$ die Reihe (20) zu benutzen? Bei $|\chi| < 1$ soll ja die Reihe (30) benutzt werden. Diese lautet hier:

$$101{,}1 - 75{,}3 + 17{,}87 - 6{,}57 + \cdots \approx 101{,}1 - 64{,}0\,.$$

Die Glieder nehmen hier zwar stärker ab als vorher, sind aber absolut beträchtlich größer. Daß auch die Reihe (30) hier versagt, liegt daran, daß dafür χ zu groß ist. Für $0{,}1 < |\chi| < 3$ sind die Debyeschen Reihen nur schlecht brauchbar. Man muß hier seine Zuflucht zu den Formeln von Nicholson und von Watson nehmen. Wir zeigen zunächst zwei Beispiele, die nicht weit von der Brauchbarkeitsgrenze der Reihe (30) liegen, bei denen diese Reihe aber noch gut konvergiert:

7. Beispiel: $x = 1000$; $p = 1002$; $r = \sqrt[3]{x} = 10$; $-\mathfrak{q} = 2 > 1$; $-\chi' = -\mathfrak{q}/r = 0{,}2$. Die Reihe lautet, wenn wir das erste Glied auf 100 bringen:

$$100 - 18{,}38 + 0{,}2409 - 0{,}01852 + \cdots \approx 100 - 18{,}16.$$

8. Beispiel: $x = 64$; $p = 64{,}2$; $r = 4$; $-\mathfrak{q} = 0{,}2 < 1$; $-\chi' = 0{,}05$:

$$100 - 4{,}592 - 0{,}03763 - 0{,}002830 + \cdots \approx 100 - 4{,}63.$$

Betrachten wir noch ein Beispiel mit $x = 1$:

9. Beispiel: $x = r = 1$; $p = 1{,}01$; $-\mathfrak{q} = 0{,}01$; $-\chi' = 0{,}01$:

$$100 - 0{,}919 - 0{,}1334\,(-1{,}311 + \cdots) \approx 100 - 1{,}1.$$

Die Konvergenz ist anfangs nicht schlecht. Aber schon das vierte Glied ist 10 mal so groß wie das vorhergehende und ist daher wegzulassen. Nur eine geringe Genauigkeit ist erreichbar, und das trotz kleinem χ'. Der Grund liegt darin, daß r zu klein ist.

Um die Anfangskonvergenz möglichst bequem beurteilen zu können, kann man die Substitutionen $1/\sqrt{p^2 - z^2} = \mathfrak{x}$, $p^2\,\mathfrak{x}^3 = \mathfrak{y}$,

$$\frac{1}{\mathfrak{x}}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}} - 1\right) = \Omega_0'$$

einführen und dann die Debyesche Funktion (9) so schreiben:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{\mathfrak{x}}\; e^{-\Omega_0'} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{m} B_{m,n}\, \mathfrak{x}^{m-n}\, \mathfrak{y}^{n}.$$

Man sieht dann ohne weiteres, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beide klein sein müssen, damit der Anfang der Reihe konvergiert. Diese Definition der Funktion $\mathfrak{D}$ hätte aber den Nachteil, daß die Formel wegen der Vieldeutigkeit der Funktion $\gamma = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\mathfrak{x}/\mathfrak{y}}$ in den verschiedenen Fällen nicht ohne weiteres auf den notwendigen Wert von γ führen würde und daß daher Zusatzbestimmungen erforderlich wären.

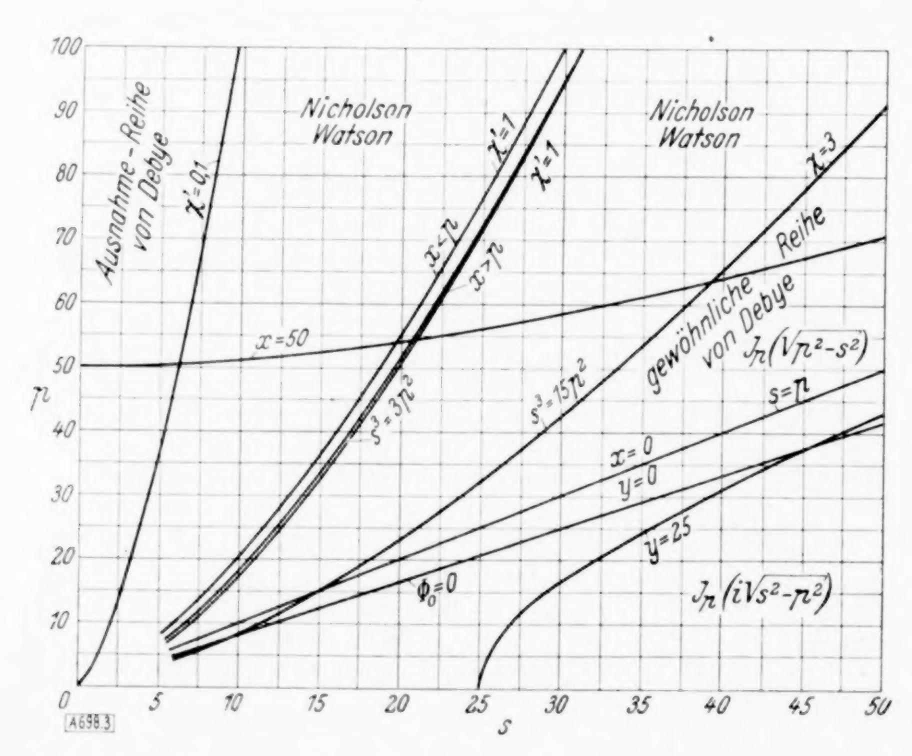


Abb. 3. Grenzen für die Brauchbarkeit der Debyeschen Reihen in der Ebene s, p.

V. Formeln von Nicholson und von Watson. Wir wenden unsere Aufmerksamkeit den Fällen zu, in denen die Debyeschen Reihen wegen mangelhafter Anfangskonvergenz unbrauchbar werden. Abb. 3 zeigt, in welchem Gebiet der beiden Veränderlichen s, p diese Fälle anzutreffen sind. Die gewöhnlichen Debyeschen Reihen, z. B. die Reihe (20), werden

gut brauchbar, etwa wenn $s^3 > 15\,p^2$ wird. Weniger einfach ist es bei der Ausnahmereihe (30): Ist $\mathfrak{q} = x - p$ groß, so genügt es, daß $|\chi'| = |\mathfrak{q}/r| < 0{,}2$ wird ($r^3 = x$). Ist dagegen $\mathfrak{q}$ klein, so muß erstens $|r| > 6$, folglich $|x| > 216$ werden (bei höheren Ansprüchen an die Genauigkeit $|r| > 17$, folglich $|x| > 5000$) und zweitens $|\chi'| < 0{,}09$ (und für größere Genauigkeit $|\chi'| < 0{,}03$). Nun ist

$$-\chi' = \frac{p-x}{x^{1/3}} = \frac{p^2-x^2}{(p+x)\,x^{1/3}} = \frac{s^2}{(2p-\mathfrak{q})(p-\mathfrak{q})^{1/3}} = \frac{s^2}{2\,p^{4/3}}\left(1-\frac{\mathfrak{q}}{2p}\right)^{-1}\left(1-\frac{\mathfrak{q}}{p}\right)^{-1/3},$$

und wenn $\mathfrak{q}/p$ klein ist, daher $s^3/p^2 \approx (2|\chi'|)^{1,5}$, beispielsweise $= (2\times 1)^{1,5} = 2{,}83$ oder $= (2\times 0{,}1)^{1,5} = 0{,}0895$. Die entsprechenden Kurven in der Abb. 3 sind nach den genauen Formeln berechnet.

In dem Gebiet zwischen den beiden Kurven $|\chi'| = 0{,}1$ und $|s^3| = 15\,p^2$ sind die Debyeschen Reihen schlecht brauchbar. Wie verhalten sich nun in diesem Gebiet die Zylinderfunktionen? Für $x = p$ wird in erster Näherung $J_p(p) \approx 0{,}4473/\sqrt[3]{p}$. In der Abb. 4 sind als Abszissen

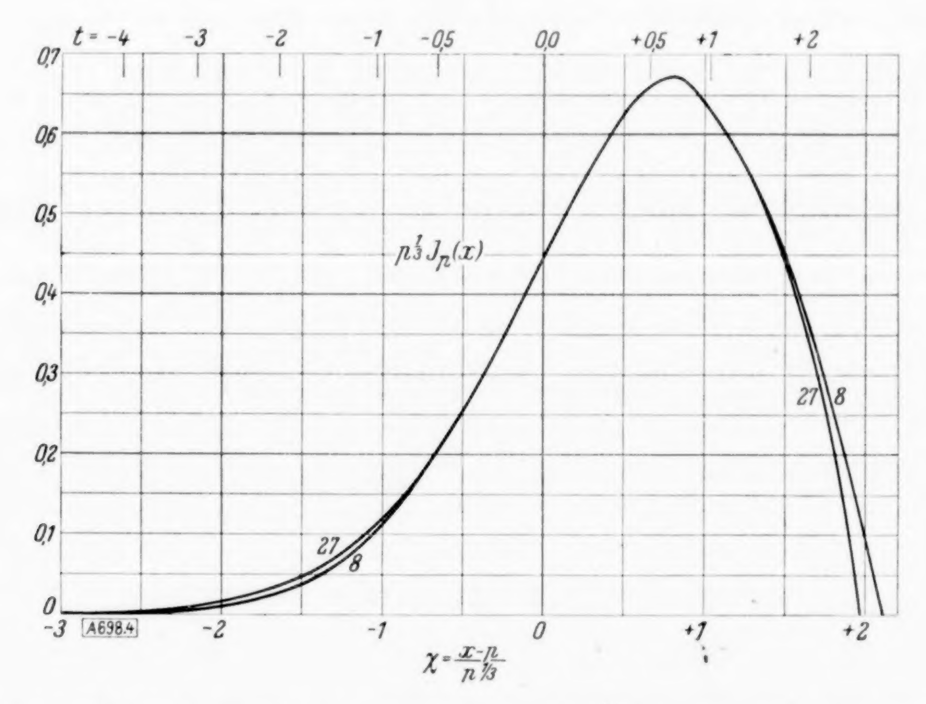


Abb. 4. $p^{1/3} J_p$ als Funktion von $\chi = (x-p)\,p^{-1/3}$ für $p = 8$ und für $p = 27$.

die Werte von $\chi = (x-p)/p^{1/3}$ aufgetragen und als Ordinaten die Werte von $p^{1/3} J_p(x)$, erstens für $p = 8$, zweitens für $p = 27$. Die beiden Kurven fallen hier fast zusammen. Hier hängt also $p^{1/3} J_p$ fast nur von χ ab, oder was annähernd auf dasselbe hinauskommt, fast nur von s^3/p^2. Die Formeln von Nicholson und von Watson stellen auf Grund dieses Sachverhalts die Zylinderfunktionen näherungsweise dar, ohne divergente Reihen zu benutzen, indem sie nämlich die Zylinderfunktionen von beliebigem Index p auf Zylinderfunktionen vom Index $p = 1/3$ und vom Argument $s^3/3\,p^2$ zurückführen.

Zur Abkürzung setzen wir

$$i^{4/3} H^{(1)}_{1/3}(i\,y) = \mathfrak{H}(y) \qquad \text{und} \qquad \frac{3}{4}\,y^2 = v\,.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{y}{\sqrt{3}}}\;\mathfrak{H}(y) = A\,R(y) - B\,y^{2/3}\,S(y)\,,$$

wo

$$A = \frac{1}{3}!\,\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0{,}4473073\,, \qquad \frac{1}{3}! = 0{,}89297951\,,$$

$$B = \frac{1}{\frac{1}{3}!\,\sqrt[3]{18}} = 0{,}4273014\,,$$

$$R(y) = 1 + \frac{v}{2} + \frac{v^2}{20} + \frac{v^3}{480} + \frac{v^4}{21\,120} + \frac{v^5}{1\,478\,400} + \cdots,$$

$$S(y) = 1 + \frac{v}{4} + \frac{v^2}{56} + \frac{v^3}{1680} + \frac{v^4}{87\,360} + \frac{v^5}{6\,988\,800} + \cdots.$$

Wir führen zunächst (in etwas geänderter Schreibweise) eine der Watsonschen Formeln vor[7]. Wir setzen

$$s = \sqrt{p^2 - x^2}, \qquad t = \frac{s^3}{3\,p^2}, \qquad u = \frac{s^5}{5\,p^4} + \frac{s^7}{7\,p^6} + \cdots,$$

so daß

$$s + t + u = p \cdot \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{s}{p}$$

wird. Dann lautet die Watsonsche Formel für $J_p(x)$ im Fall $x < p$ so:

$$\sqrt[3]{p}\,J_p\left(p\sqrt{1 - (3\,t/p)^{2/3}}\right) \sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{t}{\sqrt{3}}}\,\mathfrak{H}(t)\,e^{-u} = [A\,R(t) - B\,t^{2/3}\,S(t)]\,e^{-u}.$$

Der Fehler dieser Darstellung ist, wie Watson gefunden hat, kleiner als $(3/p)\,e^{-t-u}$.

Wir wollen diese Formel auf unser 2. Zahlenbeispiel: $p = 500$, $s = 100$ anwenden. Wir erhalten $R = 1{,}760646$; $S = 1{,}366527$;

$$A\,R - B\,t^{2/3}\,S = 0{,}7875499 - 0{,}7073672 = 0{,}0801827;$$

$$e^{-u} = 0{,}96772; \quad p^{1/3}\,J_p = 0{,}077594; \quad J_p = \underline{0{,}0097762}.$$

Die von Watson angegebene obere Schranke für den Fehler dieses Ergebnisses ist $= \dfrac{3}{500}\,e^{-1{,}3663} = 0{,}0015$, das sind 15/100 des Wertes. Wäre der Fehler tatsächlich von dieser Größenordnung, so würde man sich nur in seltenen Fällen mit dieser geringen Genauigkeit des Ergebnisses zufrieden geben können. Vermutlich ist aber diese Fehlergrenze (wie theoretisch ermittelte Fehlergrenzen so oft) viel zu groß.

Die Formel von Nicholson[8]) $J_n(n - \mathfrak{q}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\varepsilon\,\mathfrak{H}(2\,\mathfrak{q}\,\varepsilon)$ ergibt mit $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2\,\mathfrak{q}}{n - \mathfrak{q}}} = 0{,}0676933$ und $2\,\mathfrak{q}\,\varepsilon = 1{,}367682$

$$J_p = 0{,}866025 \cdot 0{,}0676933 \cdot 0{,}167069 = \underline{0{,}0097943},$$

also nur um 2/1000 des Wertes mehr. Wenn auch in andern Fällen die Abweichung zwischen den beiden Formeln nicht wesentlich größer wird, was noch zu untersuchen wäre, so kann man mit der Formel von Nicholson recht zufrieden sein und braucht sich nicht daran zu stoßen, daß man eine theoretische obere Schranke für den Fehler nicht kennt.

Dagegen liefert das erste Glied der Debyeschen Reihe (20)

$$J_p(\sqrt{p^2 - s^2}) = e^{-t-u}\sqrt{\frac{2}{\pi\,s}} = 0{,}2551 \cdot 0{,}0798 = 0{,}02037,$$

also mehr als das Doppelte. Drückt man hier s durch t aus, so erhält man $p^{1/3}\,J_p = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{e^{-t-u}}{\sqrt[6]{3\,t}}$. Je kleiner t ist, um so mehr wird der Faktor $t^{-1/6}$ einen zu großen Wert für J_p verschulden. Natürlich liegt der Grund für die Unstimmigkeit nicht allein in diesem Faktor.

VI. Die verschiedenen Wege zur Berechnung der Zylinderfunktionen. Wir wollen die Debyeschen Reihen mit den Hankelschen vergleichen und wählen dazu den Fall C rein imaginären Arguments $z = i\,y$. Die beiden Reihen sind vergleichbar, wenn $y >> p$ ist. Für den Exponenten Φ_0 erhalten wir dann

$$\Phi_0 = \sqrt{y^2 + p^2} - p\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{p}{y} = y - \frac{p^2}{2\,y} + \frac{p^4}{24\,y^3} - \cdots.$$

In den Hankelschen Reihen ist der Exponent $= y$. Die beiden Exponenten unterscheiden sich also um

$$y - \Phi_0 = \frac{p^2}{2\,y} - \frac{p^4}{24\,y^3} + \cdots.$$

Das ist der wesentlichste Unterschied zwischen dem ersten Glied der Hankelschen Reihe und dem ersten Glied der Debyeschen Reihe. Das erste Glied der Debyeschen Reihe kommt dem Wert der Zylinderfunktionen näher als das erste Glied der Hankelschen Reihe.

[7]) G. N. Watson: Proc. Camb. Phil. Soc. 19, 1918, 96; Bessel functions, S. 248 bis 252.
[8]) J. W. Nicholson: Phil. Mag. (6) 19, 1910, S. 247. — Weyrich: S. 62.

Wenn man möglichst genau rechnen will, so muß man die Summation bis zum kleinsten Glied der Reihe fortsetzen. Der Fehler ist dann ungefähr gleich der Hälfte des ersten weggelassenen Gliedes. Restabschätzungen haben bisher nicht zu einer genaueren Bestimmung des Fehlers geführt. Sie dienen mehr dem Wunsch nach theoretischer Vollständigkeit, als daß sie dem Rechner nützten. Dagegen ist es erstaunlicherweise gelungen, die Reihen, nachdem sie bei dem kleinsten Glied abgebrochen worden sind, so fortzusetzen, daß der Fehler in der Größenordnung wesentlich herabgedrückt wird[9]). Auf diese Weise werden die Reihen sogar für mittelgroße Werte der Veränderlichen gut brauchbar. Diesen Fortschritt muß man sehr hoch bewerten. Man scheint ihm bisher wenig Beachtung geschenkt zu haben.

Wir haben hier die komplexen Argumente z auf solche beschränkt, bei denen sowohl der reelle wie der imaginäre Teil positiv ist. Der Übergang auf andere komplexe Werte verursacht keine neuen Schwierigkeiten. Wird der imaginäre Teil von z negativ, so tauschen die beiden Hankelschen Funktionen H^1 und H^2 die Rollen.

Für die Berechnung der Zylinderfunktionen stehen verschiedene Reihen zur Verfügung. Ihre Anwendungsgebiete lassen sich am übersichtlichsten wohl so abgrenzen: In der Ebene der Veränderlichen $t = z\,p^{-1/3}$ zeichne man um den Punkt $t_1 = p^{2/3}$ zwei Kreise etwa mit den Radien $a = 0{,}1$ und $b = 3 = 30\,a$. Innerhalb des Kreises (a) rechnet man nach der Ausnahmereihe von Debye, in dem Ring (a, b) nach den Formeln von Nicholson und von Watson, außerhalb des Kreises (b) nach der gewöhnlichen Reihe von Debye. Nur an Punkten, die vom Nullpunkt viel weiter entfernt sind als der Punkt t_1, kann man nach der Reihe von Hankel rechnen; und nur an Punkten, die dem Nullpunkt näher liegen oder wenigstens nicht viel weiter von ihm entfernt sind als der Punkt $t_2 = p^{1/6}$, empfiehlt es sich, nach der Potenzreihe zu rechnen.

VII. Gleichungen für die Grundrisse der Fall-Linien und der Höhen-Linien. Eine Debyesche Reihe ist ein Näherungswert für ein Paß-Integral. Mit welcher Zylinderfunktion das Paß-Integral zusammenfällt, hängt davon ab, wohin die vom Paß kommende Fall-Linie beiderseits ins Unendliche läuft. Um zu erkennen, ob und wieweit unsere Reihen wirklich die ihnen zugeschriebene Bedeutung haben, werden wir diese Paß-Linien, wie wir sie kurz nennen wollen, näher betrachten müssen.

Die Betragsfläche des Integranden, der einem bestimmten Wertepaar p, z entspricht, hat unendlich viele Pässe. Wenn einer dieser Paßpunkte über dem Punkt $\gamma = \alpha + i\,\beta$ der komplexen Ebene steht, so befinden sich die übrigen bei

$$\zeta = \pm\,\gamma \pm n\,4^{\llcorner}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Dabei ist $\mathfrak{Cos}\,\gamma = p/z$. Nur bei reellem ganzem p gleichen sich die Pässe auf derselben Seite von der imaginären Achse. Wir können uns auf die zwei Pässe beschränken, für die β zwischen $-2^{\llcorner}$ und $+2^{\llcorner}$ liegt. Die Grundpunkte dieser beiden Pässe spiegeln sich am Nullpunkt. Die Pässe selbst können ganz verschiedene Gestalt und Höhe haben.

In einem Punkt $\zeta = \xi + i\,\eta$ der Integrationsebene ist der Exponent des Integranden

$$\left.\begin{aligned} \Phi + i\,\Psi = \Omega = z\,\mathfrak{Sin}\,\zeta - p\,\zeta &= z\,(\mathfrak{Sin}\,\zeta - \zeta\,\mathfrak{Cos}\,\gamma) \\ = r\,i^{\varrho}\,[\mathfrak{Sin}\,(\xi + i\,\eta) &- (\xi + i\,\eta)\,\mathfrak{Cos}\,(\alpha + i\,\beta)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (32\text{a}).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\Phi}{r} = U \cos\varrho - V \sin\varrho\,, \qquad \frac{\Psi}{r} = U \sin\varrho + V \cos\varrho \quad \ldots\ldots\ldots (33\text{a}),$$

wo

$$U(\xi, \eta) = \mathfrak{Sin}\,\xi \cos\eta - \xi\,\mathfrak{Cos}\,\alpha \cos\beta + \eta\,\mathfrak{Sin}\,\alpha \sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots (34\text{a}),$$

$$V(\xi, \eta) = \mathfrak{Cos}\,\xi \sin\eta - \xi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha \sin\beta - \eta\,\mathfrak{Cos}\,\alpha \cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots (35\text{a}).$$

Eine Höhenlinie hat die Gleichung $\Phi = $ konst, der Grundriß einer Fall-Linie die Gleichung $\Psi = $ konst. Wir setzen noch

$$U_0 = U(\alpha, \beta) = \mathfrak{Sin}\,\alpha \cos\beta\,(1 - \alpha\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha + \beta \operatorname{tg}\beta) \quad \ldots\ldots\ldots (36\text{a}),$$

$$V_0 = V(\alpha, \beta) = \mathfrak{Cos}\,\alpha \sin\beta\,(1 - \alpha\,\mathfrak{Tg}\,\alpha - \beta \operatorname{ctg}\beta) \quad \ldots\ldots\ldots (37\text{a}).$$

[9]) T. J. Stieltjes: Ann. Éc. norm., (3) III, 1886, S. 241. — J. Airey: Arch. Math. Phys. 20, S. 240, 1913, und 22, S. 30, 1914. — D. Burnett: Proc. Cambr. Phil. Soc. 26, S. 145, 1930. — G. N. Watson: Bessel functions, S. 213. — R. Weyrich: Zylinderfunktionen, S. 83.

Wenn eine Höhenlinie über einen Paß α, β läuft, so hat sie die Gleichung

$$(U - U_0) \cos \varrho - (V - V_0) \sin \varrho = 0 \quad \ldots \ldots \quad (38\text{a}).$$

Und wenn eine Fall-Linie über den Paß α, β läuft, so hat ihr Grundriß die Gleichung

$$(U - U_0) \sin \varrho + (V - V_0) \cos \varrho = 0 \quad \ldots \ldots \quad (39\text{a}).$$

Die Gestalt des Passes, der über einem bestimmten Punkt α, β liegt, und daher auch die Gestalt der über ihn laufenden Fall-Linie und ihres Grundrisses ändert sich mit ϱ. Beispiele für die Schar der Fall-Linien durch einen festen Punkt findet man bei Emde und Rühle gezeichnet (a. a. O., S. 256).

Es wird nützlich sein, denselben Beziehungen noch eine andere Form zu geben. Es sei $\check{\gamma} = \alpha - i\beta$ der zu γ konjugierte Wert und $c = |\mathfrak{Cof}\, \gamma|$, schließlich $p = m\, i^{\mu}$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= p\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\gamma} - \zeta\right) = p\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\check{\gamma}\; \mathfrak{Sin}\,\zeta}{c^2} - \zeta\right) = \frac{p}{c^2}\left(\mathfrak{Cof}\,\check{\gamma}\; \mathfrak{Sin}\,\zeta - c^2 \zeta\right) \\ &= \frac{m}{c^2}\, i^{\mu} \left[\mathfrak{Cof}\,(\alpha - i\beta)\, \mathfrak{Sin}\,(\xi + i\eta) - c^2 (\xi + i\eta)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32\text{b}).$$

Hieraus folgt

$$\frac{c^2}{m}\, \Phi = \mathfrak{U} \cos \mu - \mathfrak{V} \sin \mu, \qquad \frac{c^2}{m}\, \Psi = \mathfrak{U} \sin \mu + \mathfrak{V} \cos \mu \quad \ldots \ldots \quad (33\text{b}),$$

wo

$$\mathfrak{U}(\xi, \eta) = \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta\; \mathfrak{Sin}\,\xi \cos \eta + \mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta\; \mathfrak{Cof}\,\xi \sin \eta - (\mathfrak{Sin}^2 \alpha + \cos^2 \beta)\, \xi \quad \ldots \quad (34\text{b}),$$

$$\mathfrak{V}(\xi, \eta) = -\mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta\; \mathfrak{Sin}\,\xi \cos \eta + \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta\; \mathfrak{Cof}\,\xi \sin \eta - (\mathfrak{Sin}^2 \alpha + \cos^2 \beta)\, \eta \quad . \quad (35\text{b}).$$

Ferner sei

$$2\,\mathfrak{U}_0 = 2\,\mathfrak{U}(\alpha, \beta) = \mathfrak{Sin}\, 2\alpha - \alpha\,(\mathfrak{Cof}\, 2\alpha + \cos 2\beta) \quad \ldots \ldots \quad (36\text{b}),$$

$$2\,\mathfrak{V}_0 = 2\,\mathfrak{V}(\alpha, \beta) = \sin 2\beta - \beta\,(\mathfrak{Cof}\, 2\alpha + \cos 2\beta) \,. \quad \ldots \ldots \quad (37\text{b}).$$

Wenn eine Höhenlinie über den Paß α, β läuft, so hat sie die Gleichung

$$(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0) \cos \mu - (\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0) \sin \mu = 0 \quad \ldots \ldots \quad (38\text{b}).$$

Und wenn eine Fall-Linie über den Paß α, β läuft, so hat ihr Grundriß die Gleichung

$$(\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0) \sin \mu + (\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0) \cos \mu = 0 \quad \ldots \ldots \quad (39\text{b}).$$

Aus $\mathfrak{Cof}\,\gamma = p/z$ folgt als Beziehung zwischen $\mu, \varrho, \alpha, \beta$

$$\frac{m}{r} \cos(\mu - \varrho) = \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta, \qquad \frac{m}{r} \sin(\mu - \varrho) = \mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta \quad \ldots \ldots \quad (40),$$

und wenn man im folgenden links μ durch $(\mu - \varrho) + \varrho$ ersetzt,

$$\frac{m}{r} \sin \mu = \mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta \cos \varrho + \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta \sin \varrho \quad \ldots \ldots \quad (41\text{a}),$$

$$\frac{m}{r} \cos \mu = \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta \cos \varrho - \mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta \sin \varrho \,. \quad \ldots \ldots \quad (42\text{a}),$$

und wenn man im folgenden links ϱ durch $\mu - (\mu - \varrho)$ ersetzt,

$$\frac{m}{r} \sin \varrho = -\mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta \cos \mu + \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta \sin \mu \quad \ldots \ldots \quad (41\text{b}),$$

$$\frac{m}{r} \cos \varrho = \mathfrak{Cof}\,\alpha \cos \beta \cos \mu + \mathfrak{Sin}\,\alpha \sin \beta \sin \mu \,. \quad \ldots \ldots \quad (42\text{b}).$$

Für sehr große Werte von ξ ist

$$\Omega \approx \frac{1}{2}\, r\, e^{i\varrho} \left(e^{\xi + i\eta} - e^{-\xi - i\eta}\right).$$

Für $\xi \to +\infty$ haben daher die Höhenlinien die Asymptoten $\eta = -\varrho \pm 1^{\llcorner}$, die Fall-Linien die Asymptoten $\eta = -\varrho \pm 2^{\llcorner}$. Und für $\xi \to -\infty$ haben die Höhenlinien die Asymptoten $\eta = \varrho - 2^{\llcorner} \pm 1^{\llcorner}$, die Fall-Linien die Asymptoten $\eta = \varrho$.

Im folgenden werden wir uns auf den Fall beschränken, daß der Index p reell, also $\mu = 0$ ist. Dann haben die Höhenlinien die Gleichung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$, die Grundrisse der Fall-Linien die Gleichung $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$, und es wird

$$\frac{m}{r}\sin\varrho = -\mathfrak{Sin}\,a\sin\beta, \qquad \frac{m}{r}\cos\varrho = +\mathfrak{Cof}\,a\cos\beta.$$

Der Paß über einem bestimmten Punkt a, β kann nur eine einzige Gestalt annehmen. Es gibt für ihn nicht mehr eine Schar von Fall-Linien, sondern es läuft über ihn nur eine einzige Fall-Linie und eine einzige Steiglinie. Nur ein einziges Paar sich schneidender Höhenlinien kommt ihm zu.

Setzt man $\zeta = \gamma + \zeta_1$, macht man also den Paß zum Ursprung der Pfeile ζ_1, so erhält man für den Grundriß einer Paßlinie die Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\,2a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1\sin\eta_1 + \sin 2\beta(\mathfrak{Cof}\,\xi_1\cos\eta_1 - 1) + (\mathfrak{Cof}\,2a + \cos 2\beta)(\mathfrak{Cof}\,\xi_1\sin\eta_1 - \eta_1) = 0 \quad (43),$$

daher in der Umgebung des Passes näherungsweise

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & [2\xi_1\eta_1\,\mathfrak{Sin}\,2a + (\xi_1^2 - \eta_1^2)\sin 2\beta] + \left[\eta_1\left(\xi_1^2 - \frac{1}{3}\eta_1^2\right)(\mathfrak{Cof}\,2a + \cos 2\beta)\right] \\ & + \left[\xi_1\eta_1\frac{\xi_1^2 - \eta_1^2}{3}\mathfrak{Sin}\,2a + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^4 + \eta_1^4}{6} - \xi_1^2\eta_1^2\right)\sin 2\beta\right] + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (44).$$

Die Richtung der Fall-Linie am Paß ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,2a + \sin^2 2\beta} + \mathfrak{Sin}\,2a}{\sin 2\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45).$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{Tg}\,(a + i\beta) = \frac{\mathfrak{Sin}\,2a + i\sin 2\beta}{\mathfrak{Cof}\,2a + \cos 2\beta} = \frac{s}{p}\,i^{-\sigma},$$

mithin

$$\operatorname{tg}\sigma = -\frac{\sin 2\beta}{\mathfrak{Sin}\,2a} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2},$$

folglich ist der Winkel, den die Fall-Linientangente am Paß mit der Richtung wachsender ξ bildet,

$$\varphi = 1^{\llcorner} + \frac{\sigma}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46).$$

VIII. Formgrenze und Größengrenze. Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: Wie läuft eine Fall-Linie, die von einem Paß kommt, beiderseits ins Unendliche? Beginnen wir mit dem Paß, der bei $\zeta = -\gamma$, also im zweiten Quadranten liegt. Dort ist $-2^{\llcorner} < \sigma < -1^{\llcorner}$, daher $0 < \varphi < 0{,}5^{\llcorner}$. Die Fall-Linie über einen solchen Paß kommt von $-\infty + i\varrho$ und geht nach $+\infty + i(2^{\llcorner} - \varrho)$. Nach Abb. 1 stellt daher das Paßintegral in jedem Fall die Funktion H^1 dar.

Nicht so einfach ist es bei dem Paß, der bei $\zeta = +\gamma$, also im vierten Quadranten liegt. Hier ist $0 < \sigma < 1^{\llcorner}$, folglich $1^{\llcorner} < \varphi < 1{,}5^{\llcorner}$. Alle Paßlinien kommen hier zwar von $+\infty - i(2^{\llcorner} + \varrho)$. Aber von den weiter rechts gelegenen Pässen mit großem a laufen die Fall-Linien nach $+\infty + i(2^{\llcorner} - \varrho)$ weiter (Abb. 6): Das Paßintegral stellt nach Abb. 1 die Funktion $2J$ dar. Dagegen laufen von den nahe bei der imaginären Achse gelegenen Pässen mit kleinem a die Fall-Linien nach $-\infty + i\varrho$ (Abb. 6): Jetzt stellt das Paßintegral die Funktion H^2 dar. Im ersten Falle setzen sich die Integrale über die beiden Pässe bei $\pm\gamma$ zusammen zu $H^2 = 2J - H^1$, im zweiten Falle zu $2J = H^2 + H^1$. (Diese Beziehung zwischen den drei Funktionen gilt ja nicht nur asymptotisch, sondern in Strenge.) Unsere asymptotischen Reihen stellen ursprünglich nicht eine bestimmte Zylinderfunktion, sondern das Integral über einen bestimmten Paß dar. Es erscheint also jetzt fraglich, ob die Reihen, die sich auf den Paß bei $+\gamma$ beziehen, immer die Zylinderfunktion $2J_p$ bedeuten, die wir früher dafür angegeben haben.

Zwischen den Pässen mit den nach rechts zurücklaufenden Fall-Linien und den Pässen mit den nach links weiterlaufenden Fall-Linien muß es eine Grenzlinie geben. Wir wollen sie die Formgrenze nennen. Der geometrische Ort dieser Grenzpässe muß durch den Nullpunkt gehen. Seine Gleichung ist daher $\Psi_0 = 0$. Wenn wir auch einen komplexen Index p zulassen[10], lautet diese Gleichung nach (33a, b)

$$U_0 \sin \varrho + V_0 \cos \varrho = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{U}_0 \sin \mu + \mathfrak{V}_0 \cos \mu = 0 .$$

Wenn wir uns dagegen, wie wir es hier tun wollen, auf einen reellen Index beschränken, so haben wir hierin $\mu = 0$ zu setzen, so daß sich die Gleichung der Formgrenze zu $\mathfrak{V}_0 = 0$ vereinfacht, d. h. nach (37b) zu

$$\mathfrak{Cof}\, 2\alpha = \frac{\sin 2\beta}{\beta} - \cos 2\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Diese Grenzlinie ist in Abb. 5 gezeichnet nach den Zahlenwerten der zugehörigen Tabelle. Wie die Fall-Linie über einen solchen Grenzpaß aussieht, zeigt Abb. 6. Die Fall-Linie setzt sich durch Spiegelung am Nullpunkt über diesen hinaus fort. Sie mündet, getrennt von allen andern Paßlinien, oben links bei $-\infty + i(\varrho + 2^{\llcorner})$ ins Unendliche[11].

Abb. 7 zeigt die Formgrenze noch in einer andern Gestalt: p/r (bei reellem p) als Funktion von ϱ. Die Kurve ist fast genau eine Gerade. Genauer wird sie durch die empirische Gleichung

$$p/r = 1 - \varrho + 0{,}102\, \varrho\, (1 - \varrho)^3$$

dargestellt.

Die Formgrenze geht in der γ-Ebene (Abb. 5) durch den Punkt $0 - i\, 1^{\llcorner}$. Alle Punkte, die rechts auf der Parallelen zur reellen Achse durch diesen Punkt (untere Randlinie der

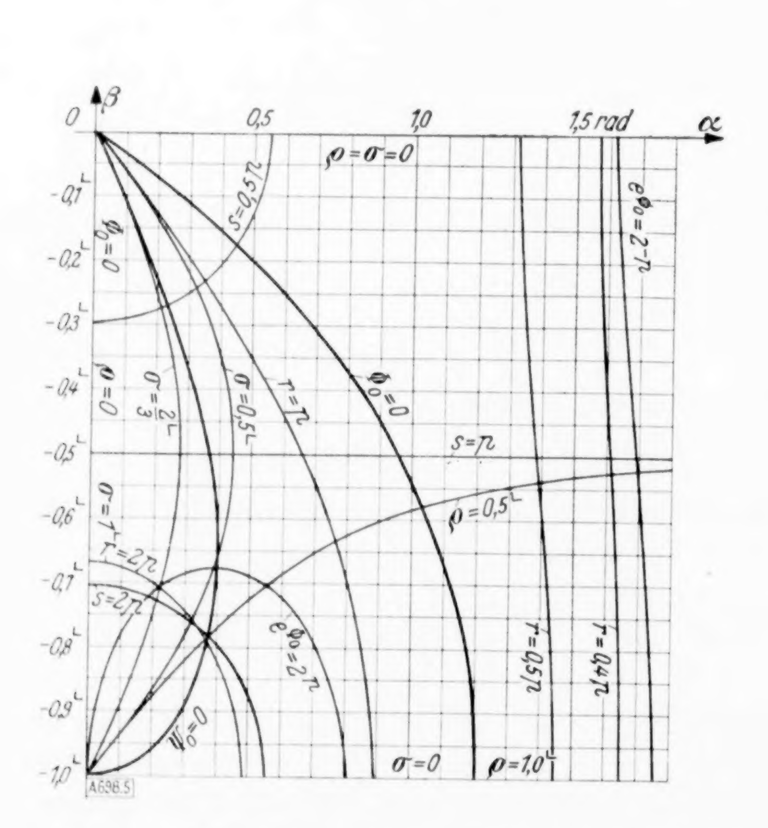


Abb. 5. Formgrenze $\Psi_0 = 0$ und Größengrenze $\Phi_0 = 0$ in der Ebene $\gamma = \alpha + i\beta$.

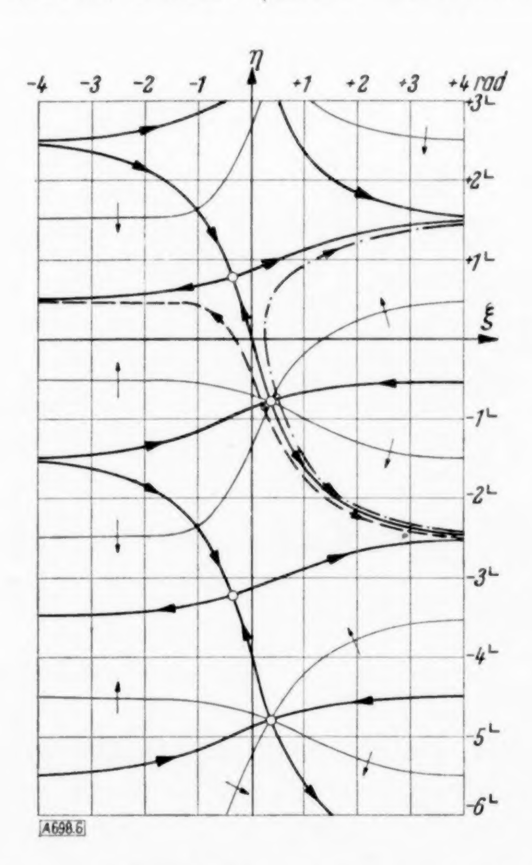


Abb. 6. Fall-Linien (mit Längspfeilen) und Höhenlinien (mit Querpfeilen) in der Ebene $\zeta = \xi + i\eta$, wenn der Paß auf oder an der Formgrenze liegt. Alle Pfeile weisen in Richtung des Gefälles. Die Kreise geben die gewählte Lage der Pässe an.

Abb. 5) liegen, befinden sich rechts von der Formgrenze. Folglich bedeutet unsere Reihe (26) wirklich immer die Funktion $2\,J$ rein imaginären Arguments $i\,y$ und nirgends die Funktion H^2.

[10] P. Debye: Sitz.-Ber. Bayer. Ak. 1910, § 2, Gl. (8), S. 9 und G. N. Watson, Bessel functions, S. 262, setzen, um die Formgrenze zu bestimmen, nicht $\Im\mathfrak{m}\, \Omega = 0$, sondern $\Im\mathfrak{m}\,(\Omega/z) = 0$ und erhalten so die Gleichung $V_0 = 0$, die aus der allgemeinen Gleichung hervorgeht, wenn man $\varrho = 0$ setzt. Die so bestimmte Formgrenze gilt daher entgegen der Absicht nicht für komplexes Argument z und komplexen Index p, sondern nur für reelles Argument x und komplexen Index p, einen Sonderfall, der praktisch kaum vorkommt.

[11] Als Formgrenze treten auch solche Fall-Linien auf, die einen Paß nicht mit seinem Spiegelbild, sondern mit seinem periodischen Nachbar verbinden. Doch kommen sie nur bei rein imaginärem Index p vor, brauchen also hier nicht beachtet zu werden. (Wohl aber kann ein Paß mit seinem periodischen Nachbar bei reellem Index durch eine Höhenlinie verbunden sein; siehe Abb. 8.)

Anders ist es dagegen z. B. bei unserer Reihe (28). Nach Überschreiten des Punktes

$$\alpha = 0{,}3716; \qquad \beta = -1{,}2293\ \text{rad} = -0{,}7826^{⌐}$$

der Formgrenze (links unten) stellt die Reihe (28) nicht mehr die Funktion $2J$, sondern die Funktion H^2 des Arguments $r\sqrt{i}$ dar. Die beiden Funktionen unterscheiden sich um die Funktion H^1. Wenn etwa H^1 hier sehr klein wäre, so würde auch (28) praktisch durchweg die Funktion $2J$ darstellen. Wir müssen daher untersuchen, wie groß H^1, d. h. das Integral über den bei $-\gamma$ gelegenen „Gegenpaß" ist (Abb. 6 links oben).

Formgrenze.

α	$-\beta$	ϱ	$\frac{p}{r}$
0,0000	0,00⌐	0,0000⌐	1,0000
0,0452	0,05	0,0023	0,9979
0,0899	0,10	0,0090	0,9918
0,1751	0,20	0,0358	0,9672
0,2513	0,30	0,0794	0,9265
0,3147	0,40	0,1387	0,8700
0,3617	0,50	0,2125	0,7979
0,3890	0,60	0,3002	0,7103
0,3921	0,70	0,4024	0,6065
0,3639	0,80	0,5224	0,4836
0,2873	0,90	0,6719	0,3306
0,2135	0,95	0,7720	0,2289
0,1389	0,98	0,8574	0,1428
0,0000	1,00	1,0000	0,0000

Größengrenze.

α	$-\beta$	ϱ	$\frac{p}{r}$
0,0	0,0000⌐	0,0000⌐	1,0000
0,1	0,0369	0,0037	1,0034
0,2	0,0746	0,0148	1,0134
0,3	0,1139	0,0335	1,0301
0,4	0,1557	0,0601	1,0537
0,5	0,2009	0,0953	1,0841
0,6	0,2509	0,1399	1,1216
0,7	0,3072	0,1954	1,1663
0,8	0,3718	0,2633	1,2185
0,9	0,4484	0,3480	1,2785
1,0	0,5432	0,4568	1,3466
1,10	0,6726	0,6087	1,4234
1,15	0,7648	0,7212	1,4651
1,18	0,8178	0,7882	1,4912
1,20	1,0000	1,0000	1,5092

Dazu suchen wir zunächst den geometrischen Ort für die Pässe auf, die ebenso hoch sind wie ihr Gegenpaß. Im allgemeinen ist die Höhe des einen Passes $= e^{\Phi_0}$, die Höhe des andern $= e^{-\Phi_0}$. Beide Pässe werden also gleich hoch (Höhe $= 1$), wenn $\Phi_0 = 0$ ist, im allgemeinen also nach (33a, b), wenn

$$U_0 \cos \varrho = V_0 \sin \varrho \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{U}_0 \cos \mu = \mathfrak{V}_0 \sin \mu$$

ist. Beschränken wir uns wieder auf einen reellen Index p, setzen also $\mu = 0$, so haben wir die einfache Gleichung $\mathfrak{U}_0 = 0$ oder nach (36b)

$$\cos 2\beta = \frac{\operatorname{Sin} 2\alpha}{\alpha} - \operatorname{Cof} 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48).$$

Auch diese Grenzlinie ist in Abb. 5 und 7 nach den Zahlenwerten der zugehörigen Tabelle[12]) gezeichnet. Wir wollen sie die Größengrenze nennen. Wie die Formgrenze geht sie vom Nullpunkt aus, entfernt sich dann aber immer mehr von der Formgrenze und von der imaginären Achse[13]). Die Höhenlinien, die über einen solchen (auf der Kurve $\varrho = 0{,}5^{⌐}$ gelegenen) Grenzpaß laufen, sind in Abb. 8 gezeichnet

$$(\alpha = 1{,}0327; \qquad \beta = -0{,}9115\ \text{rad} = -0{,}5803^{⌐}).$$

Rechts von der Größengrenze sind die Pässe niedriger, links von ihr höher als ihr Gegenpaß (der der Funktion H^1 zukommt). Solange man nicht die Formgrenze überschreitet, bedeutet

[12]) Für die Berechnung der beiden Tabellen sowie der Kurven in Abb. 6 und 8 danke ich meiner Assistentin Frl. Studienassessorin Eleonore Bachner.

[13]) In der Kurvenschar bei Emde und Rühle, a. a. O. S. 260, befindet sich auch unsere Größengrenze unter der Bezeichnung $\mu = \mp 0{,}0^{⌐}$. Auch unsere Formgrenze findet sich dort wieder, allerdings bei komplexem Index als Größengrenze unter der Bezeichnung $\mu = 1{,}0^{⌐}$. Überhaupt kann eine Kurve, die in einem Fall eine Formgrenze bedeutet, in einem andern eine Größengrenze sein.

aber das Paßintegral stets die Funktion $2\,J$. Für die Funktion H^2 erhalten wir rechts von der Größengrenze in genügendem Abstand von ihr (Abb. 5 u. 8)

$$H^2 = 2\,J - H^1 \approx -H^1$$

und links von ihr

$$H^2 = 2\,J - H^1 \approx 2\,J\,.$$

Überschreiten wir schließlich auch noch die Formgrenze, so gilt dort

$$2\,J = H^1 + H^2 \approx H^2\,.$$

Wie groß ist nun Φ_0 an der Formgrenze? Wir wählen ihren schon vorhin angegebenen Schnittpunkt mit der Kurve $\varrho = 0{,}5^{\llcorner}$. Nach (33b, 36b, 47) erhalten wir

$$\frac{\Phi_0}{p} = \frac{\mathfrak{Sin}\,2\,\alpha}{\mathfrak{Cos}\,2\,\alpha + \cos 2\,\beta} - \alpha = \beta\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2\,\alpha}{\sin 2\,\beta} - \alpha = 1{,}213\,,$$

$$e^{\Phi_0} = 3{,}363^p\,, \qquad e^{-\Phi_0} = 0{,}2973^p\,.$$

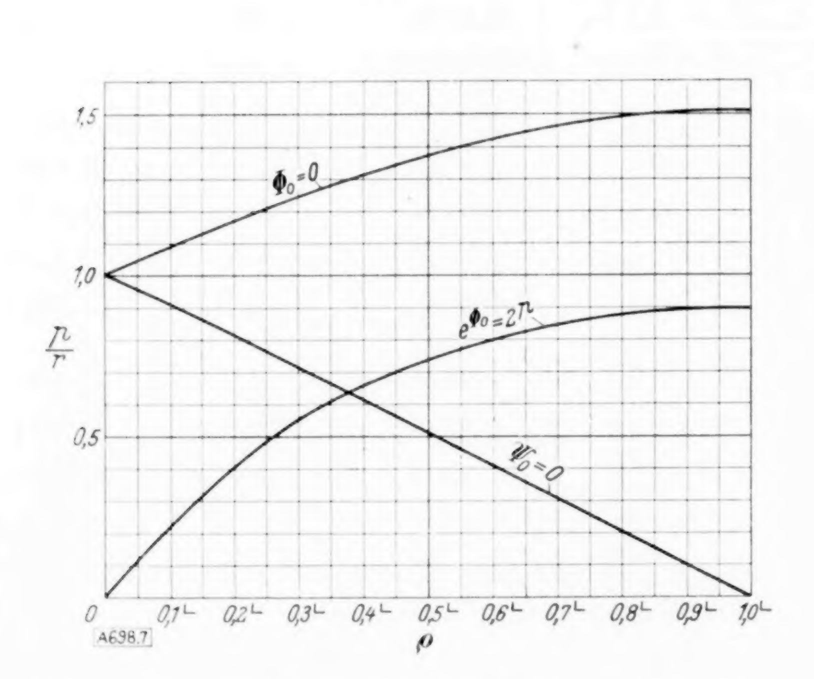


Abb. 7. $z/p = (r/p)\,i^{\varrho}$ an der Formgrenze $\Psi_0 = 0$ und an der Größengrenze $\Phi_0 = 0$.

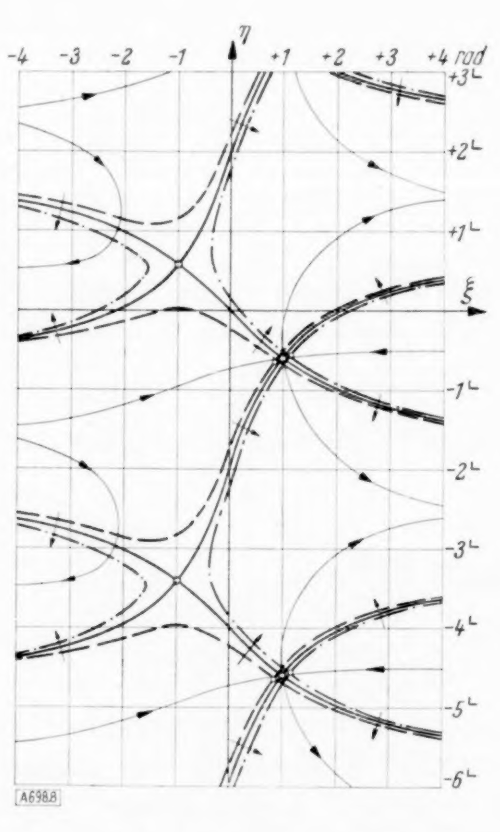


Abb. 8. Fall-Linien (mit Längspfeilen) und Höhenlinien (mit Querpfeilen) in der Ebene $\zeta = \xi + i\eta$, wenn der Paß auf oder an der Größengrenze liegt. Alle Pfeile weisen in Richtung des Gefälles. Die Kreise geben die gewählte Lage der Pässe an.

Schon bei $p = 3$ ist der eine Paß mehr als 1000 mal so hoch wie der andere. Damit die ersten Glieder der Reihe genügend konvergieren, wird man sich auf genügend große Werte von s beschränken, etwa mindestens $s \approx 6$ machen. Nun ist an unserem Schnittpunkt ziemlich genau $s = 2\,p$. Man wird also die Reihe (28) für kleinere Werte als $p = 3$ nicht benutzen. Dann ist aber $2\,J \approx H^2$; denn H^1, um das sie sich unterscheiden, ist schon sehr klein gegen sie. Wenn unsere Reihe (28) überhaupt brauchbar ist, können wir ihr auch nach Überschreiten der Formgrenze die Bedeutung $2\,J$ zuschreiben und unbeachtet lassen, daß sie dann „eigentlich“ die Funktion H^2 darstellt.

Um einen Anhalt zu bieten, sind in Abb. 5 noch die beiden Kurven eingetragen, auf denen $e^{\Phi_0} = 2^{\pm p}$ wird (siehe auch Abb. 7). Aus dem Lauf der Kurve für 2^p ersehen wir zugleich, daß die β-Achse zur Größengrenze $\Phi_0 = 0$ zu rechnen ist. Das entspricht auch ganz dem Charakter ungedämpfter Wellen, die die Zylinderfunktionen hier darstellen und die durch die Reihen (23, 24, 25) ausgedrückt werden.

Da die Beziehung $2\,J = H^1 + H^2$ in Strenge gilt, scheint es auf den ersten Blick so, als müßte der an der Formgrenze stattfindende Bedeutungswechsel der Reihe (28) mit einem Sprung verbunden sein, wenn H^1 hier nicht verschwindet. Die Erklärung liegt darin, daß jene Beziehung zwar für die Zylinderfunktionen selbst in Strenge gilt, für die sie nur asymptotisch ersetzenden Reihen jedoch nur näherungsweise.

Anschauliches zur Picarditeration bei Differentialgleichungen*).

Von *Theodor Zech* in Darmstadt.

1. Ziel der Arbeit. Iterationsverfahren dienen zur Auflösung von Gleichungen oder Gleichungssystemen. Der Name deutet an, daß die gesuchten Zahlen oder Funktionen *schrittweise* angenähert werden. Jeder Schritt besteht im Übergang von der jeweils letzten bekannten Näherung zu einer neuen besseren.

Diese Verfahren werden in der Literatur meist sehr formal behandelt. Eine Ausnahme bildet nur der Fall der Zahlengleichung mit einer Unbekannten. Hier verfolgt man das Fortschreiten der Iteration gern auch geometrisch und kommt zu einer guten Einsicht in ihren Mechanismus. Nach Ergänzung der geometrischen Betrachtungen für eine gewöhnliche Gleichung stellen wir uns in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe, auch die Picarditeration[1]) (meist als Verfahren der sukzessiven Approximationen bezeichnet) für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung von einem ähnlich anschaulichen Standpunkte aus zu beleuchten. Dabei ist es möglich, den Grundgedanken des Verfahrens deutlicher als bei „eleganter", rein rechnerischer Behandlungsweise herauszuarbeiten.

Abschnitt A bringt eine kurze Darstellung der iterativen Auflösung von gewöhnlichen Gleichungen mit einer Unbekannten. Die dabei auftretende Bedingung für möglichst gute Konvergenz läßt sich so aussprechen, daß sie auch allgemeiner sinnvoll ist. In den Abschnitten B und C wird untersucht, inwiefern die übertragene Bedingung beim Picardschen Iterationsverfahren erfüllt ist. Als Ausgangspunkt dient zuerst in B die geometrische Deutung der Picardschen Formel, nachher in C die lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten, wobei sich auch Beziehungen zum Heavisidekalkül ergeben.

2. Bezeichnungen. Bei der iterativen Auflösung einer einzigen Gleichung für eine Unbekannte (Zahl) X wird der Übergang von der Näherung x_n zur folgenden x_{n+1} durch eine „Schrittfunktion" $\varphi(x)$ vermittelt:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Man denke etwa an das Newtonsche Verfahren zur Auflösung von $f(x) = 0$, für das

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \text{also } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ist. Auch die Regula falsi, die üblichen Verfahren zum Quadratwurzelziehen, sogar die gewöhnliche „schriftliche Division" von zwei ganzen Zahlen lassen sich hier unterordnen; wir wollen die zugehörigen $\varphi(x)$ allerdings nicht aufschreiben.

Sind mehrere Zahlen gesucht, so werden auch die Näherungen und die Schrittfunktion Gesamtheiten von mehreren Zahlen bzw. Schrittfunktionen; bei Aufsuchung unbekannter Funktionen treten an Stelle der Näherungswerte und der Schrittfunktion Näherungsfunktionen und eine Funktionaltransformation. Verallgemeinern wir die Bedeutung der Bezeichnungen und der Symbole „Unbekannte X", „Näherung x_n", „Schrittfunktion $\varphi(x)$" in passender Weise, so können wir wörtlich die für die Auflösung einer Gleichung für eine einzige Zahl gegebene Beschreibung der Iteration beibehalten.

Als Beispiele nennen wir die iterative Auflösung von linearen Gleichungen (Seidelsches und Liebmannsches Verfahren u. dgl.), die Picardsche Auflösung von Differentialgleichungen mit sukzessiven Approximationen, die Auflösung von Integralgleichungen mit dem zur Neumannschen Reihe führenden Einsetzungsprozeß.

A. Auflösung gewöhnlicher Gleichungen mit Iteration.

3. Übliche geometrische Deutung. Bei Zulässigkeit des Grenzübergangs $n \to \infty$ in (1) erfüllt ein etwaiger Grenzwert X der Folge x_n die Gleichung[2])

$$x = \varphi(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

*) Aus einer Dissertation in der Abt. f. Math. u. Naturwiss. der Techn. Hochsch. Darmstadt. Berichterstatter: Prof. Dr. A. Walther, Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. V. Blaeß.

[1]) É. Picard: Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, J. math. pures appl. (4) 6 (1890) chap. V, 197 . . . 210; É. Picard: Traité d'analyse 2 (Paris 1893, Gauthier-Villars) 301 . . . 304.

[2]) Bemerkung zu den Bezeichnungen: Wir unterscheiden zwischen der Veränderlichen x und der Gleichungswurzel X. Eine Gleichung entsteht durch formales Gleichsetzen zweier Funktionen von x; ein Gleichsein sagt sie nur für die Sonderwerte X der Veränderlichen x aus.

umgekehrt ist daher bei einer Gleichung von der Gestalt (2) die rechte Seite $\varphi(x)$ unter Umständen als Schrittfunktion zur Iteration verwendbar. An den Fall einer gewöhnlichen Gleichung von der Gestalt (2) denkt man besonders, wenn man von Iteration spricht, und mit diesem Fall wollen wir uns zuerst beschäftigen.

Der Iterationsschritt läßt sich hier in bekannter Weise[3]) geometrisch deuten (Abb. 1); ihm entspricht im rechtwinkligen x, y-System der dreiteilige Streckenzug vom Punkt x_n der Abszissenachse zum entsprechenden Punkt P_n der Kurve $y = \varphi(x)$, von da zum in gleicher Höhe $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ gelegenen Punkt Q_n der Geraden $y = x$ und schließlich in y-Richtung auf die Abszissenachse zurück nach x_{n+1}. Setzt man die Streckenzüge für mehrere Einzelschritte aneinander, so ergibt sich bei Fortlassung der doppelt durchlaufenen Teile ein treppen- oder auch ein spiralenartiges Gebilde (Abb. 2a und 2b). Die gesuchte Wurzel X

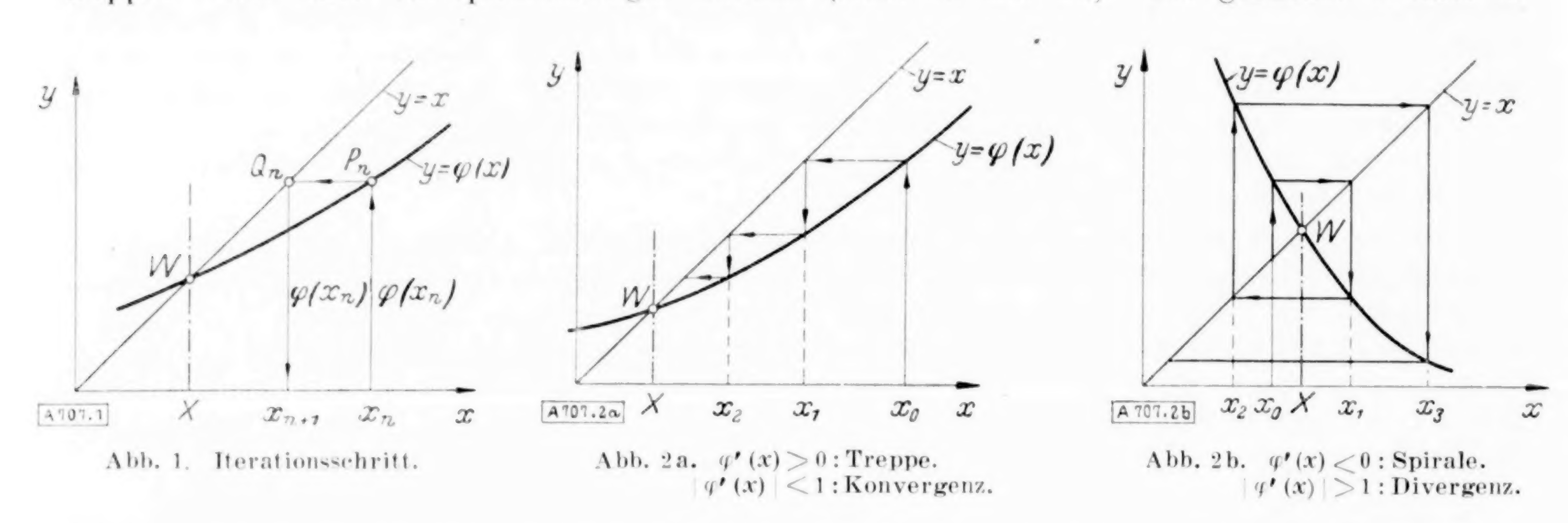


Abb. 1. Iterationsschritt.

Abb. 2a. $\varphi'(x) > 0$: Treppe. $|\varphi'(x)| < 1$: Konvergenz.

Abb. 2b. $\varphi'(x) < 0$: Spirale. $|\varphi'(x)| > 1$: Divergenz.

ist geometrisch die Abszisse des Schnittpunktes W von $y = x$ und $y = \varphi(x)$. Die Treppe oder Spirale kommt dem Punkt W immer näher, wenn durchweg $|\varphi'(x)| < 1$ gilt, die Kurve $y = \varphi(x)$ also genügend flach ist. In diesem Falle (Abb. 2a) konvergiert das Iterationsverfahren. Umgekehrt divergiert es bei zu steilem $y = \varphi(x)$; bei $|\varphi'(x)| > 1$ entfernen sich Treppe oder Spirale vom Schnittpunkt W (Abb. 2b).

Die geometrische Deutung führt hier nicht nur zu qualitativem Verständnis des Iterationsverfahrens, wir sind sogar ohne große Mühe zu hinreichenden Konvergenz- und Divergenzbedingungen vorgedrungen.

4. Schärfere Untersuchung. Vom theoretischen Standpunkt aus ist das Vorkommen der Ableitung $\varphi'(x)$ ein kleiner Schönheitsfehler in den angegebenen Bedingungen. Bei Vorzeichenwechsel von $x - \varphi(x)$ reicht bloße Stetigkeit von $\varphi(x)$ für die Existenz einer Wurzel von (2) aus; ebenso erzwingt im Falle der Konvergenz von $x_0, x_1, x_2, \ldots$ schon die Stetigkeit von $\varphi(x)$, daß der Grenzwert der Folge die Gl. (2) erfüllt. Man wird daher versuchen, ohne die Differenzierbarkeit von $\varphi(x)$ auszukommen. Dazu suchen wir die scharfen Bedingungen auf, unter denen der Übergang von x_n zu x_{n+1} verbessernd wirkt.

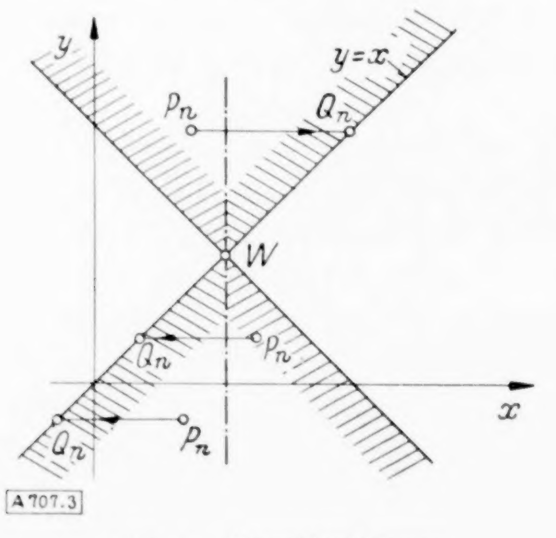


Abb. 3. *Verschlechterung* beim Iterationsschritt.

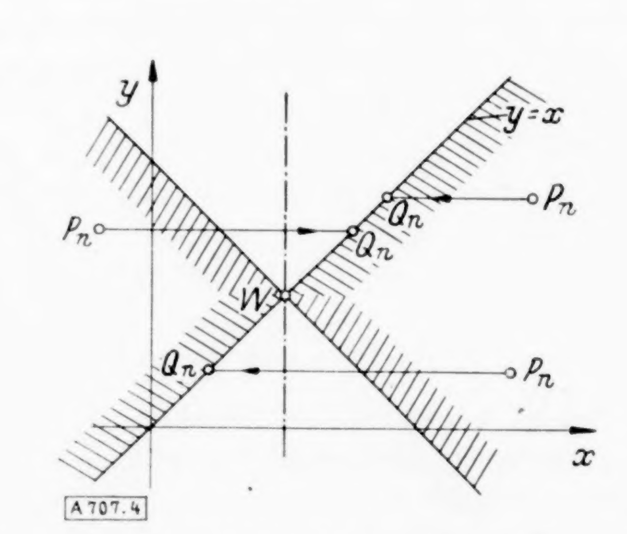


Abb. 4. *Verbesserung* beim Iterationsschritt.

[3]) Ähnliche Betrachtungen finden sich schon bei A. M. Legendre: Zahlentheorie 2, übers. von H. Maser (Leipzig 1893, B. G. Teubner) 384 . . . 421; ferner in mehreren Arbeiten von W. Heymann: Z. B. Über die Auflösung von Gleichungen durch Iteration auf geometrischer Grundlage, Jber. Techn. Staatslehranstalten Chemnitz 1904, 1 . . . 48; Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Z. Math. Physik 39 (1894) 321 . . . 354; Theorie der An- und Umläufe . . . , J. reine angew. Math. 113 (1894) 267 . : . 302; schließlich bei C. Isenkrahe: Das Verfahren der Funktionswiederholung . . . (Leipzig 1897, B. G. Teubner).

In Abb. 1 wird nur beim Übergang von P_n zu Q_n die Abszisse, damit die Güte der Näherung, geändert. Man erkennt Verschlechterung und Verbesserung an den Abständen der Punkte P_n und Q_n von der durch W gehenden Senkrechten $x = X$ (Abb. 3 und 4). Liegt P_n entweder zugleich über der Geraden $y = x$ und über ihrem Spiegelbild in bezug auf die Senkrechte durch W oder zugleich unter beiden, so hat der zu P_n gehörige Punkt Q_n einen größeren Abstand von der Senkrechten $x = X$ (Abb. 3); alle Punkte P_n aus dem oberen oder unteren der vier Winkelräume in Abb. 3 gehen also beim Iterationsschritt in schlechtere über. Umgekehrt werden alle Punkte P_n aus dem rechten und linken Winkelraum in Punkte Q_n mit kleinerem Abstand von der Senkrechten durch W übergeführt; sie werden also verbessert (Abb. 4). Die Punkte der beiden Grenzgeraden zwischen den Winkelräumen werden weder verbessert noch verschlechtert.

Demnach führt bei der Auflösung von $x = \varphi(x)$ jeder Schritt $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ *näher an die Wurzel heran*, wenn die beteiligten Punkte der Kurve $y = \varphi(x)$ in den rechten und den linken Winkelraum fallen, insbesondere wenn die ganze Kurve in diesen beiden Winkelräumen verläuft und nur im Punkte W den Rand erreicht.

Damit jeder Schritt verbessert, braucht $\varphi(x)$ hiernach nicht einmal stetig zu sein. Wir brauchen die Stetigkeit aber, um zu erreichen, daß x_n der Wurzel X auch *beliebig nahe* kommt. Bei jedem Schritt ist die wagerechte Entfernung des Punktes P_n von der nächstliegenden Grenzgeraden die Verbesserung (Abb. 5). Wenn wir zunächst eine beliebige offene Umgebung von W ausschließen, haben die wagerechten Entfernungen der Kurvenpunkte $y = \varphi(x)$ vom Rande des Winkelraums bei stetigem $\varphi(x)$ eine positive Mindestgröße m. Außerhalb dieser Umgebung bringt also jeder Iterationsschritt mindestens eine Verbesserung um m. D. h. die Iteration muß schließlich in die Umgebung hineinführen. Da die Umgebung beliebig klein angenommen werden kann, konvergiert die Folge $x_0, x_1, \ldots$ gegen die Abszisse X von W, und wir gewinnen: *Eine etwa vorhandene Wurzel der Gleichung $x = \varphi(x)$ kann durch Iteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ von beliebigem x_0 aus gefunden werden, wenn $\varphi(x)$ stetig ist und die Kurve $y = \varphi(x)$ in gewissen Winkelräumen bleibt. Die Winkelräume gehen vom Schnittpunkte W der Kurve $y = \varphi(x)$ mit der Geraden $y = x$ nach rechts und links aus und werden von dieser Geraden und ihrem Spiegelbild an der Senkrechten durch W begrenzt. Nur in W darf $y = \varphi(x)$ den Rand erreichen*[4]. Gehört $y = \varphi(x)$ in der Nähe von W, aber nicht durchweg, den beiden seitlichen Winkelräumen an, so tritt nur bei genügend guter Anfangsnäherung x_0 mit Sicherheit Konvergenz ein.

Bei differenzierbarem $\varphi(x)$ prüft man das Erfülltsein unserer Bedingung am einfachsten am Wert von $|\varphi'(x)|$ nach, wodurch man auf das schon erwähnte übliche Konvergenzkriterium zurückkommt. Bei $|\varphi'(x)| < 1$ für eine Umgebung von X liegt $y = \varphi(x)$ ein Stück weit in den seitlichen Winkelräumen, und die Iteration konvergiert. Umgekehrt liegt $y = \varphi(x)$ ein Stück weit im oberen und unteren Winkelraum, sobald nahe X die Ungleichung $|\varphi'(x)| > 1$ gilt, und die Iteration divergiert sicher.

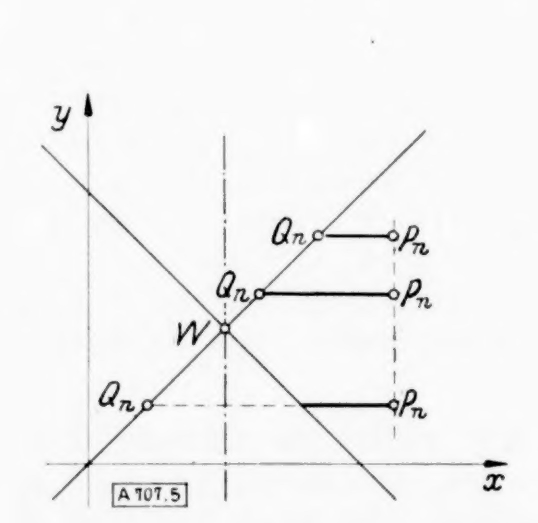


Abb. 5. Die wagerechte Entfernung des Punktes P_n von der näheren Geraden ist die Verbesserung.

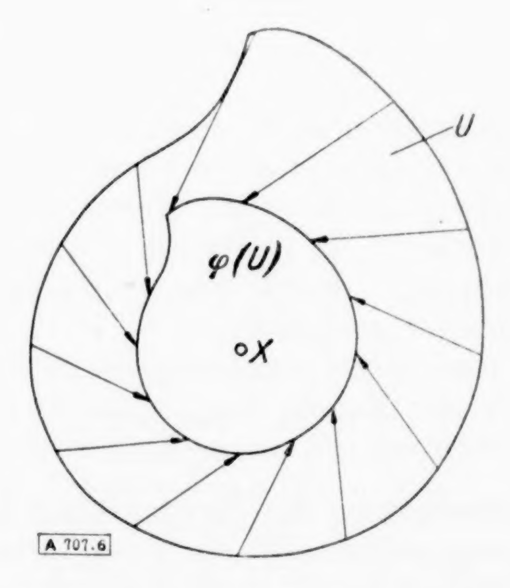


Abb. 6. Ein Iterationsschritt im Komplexen führt eine Umgebung U von X in eine kleinere $\varphi(U)$ über.

5. Möglichst gute Konvergenz. Da die wagerechte Entfernung des Punktes P_n vom Rande des Winkelraums die beim folgenden Schritt eintretende Verbesserung ist, wird diese *Verbesserung* bei festem x *möglichst groß* sein, wenn P_n möglichst gleiche Höhe hat wie W (Abb. 5). Die

[4]) Vgl. auch Th. Zech: Auflösung der Gleichung 3. Grades durch Iteration, Z. math. naturwiss. Unterr. 67 (1936) 270 . . . 273.

Konvergenz wird also dann besonders gut sein, wenn $y = \varphi(x)$ im ganzen recht flach verläuft. Spricht man dies so aus, daß $\varphi(x)$ ***eine recht wenig mit x veränderliche Funktion***[5]) („recht wenig von x abhängig") sein soll, so hat man eine sehr verallgemeinerungsfähige Formulierung.

Beim Aufsuchen von Wurzeln komplexer Gleichungen mit dem Iterationsverfahren kann man sie unverändert beibehalten. Durch komplexes $\varphi(x)$ wird eine Abbildung der x-Ebene auf sich selbst herbeigeführt. Die Bedingung besagt dann geometrisch, daß jede komplexe Umgebung U von X in eine möglichst kleine Umgebung $\varphi(U)$ von X übergehen soll (Abb. 6). Bei Auflösung von Gleichungssystemen tritt an Stelle von $\varphi(x)$ eine Transformation, deren Ergebnis sich nur langsam mit den eingesetzten Werten ändern darf, wenn man gute Konvergenz wünscht. Eine geometrische Deutung dieser Forderung läßt sich ebenso wie für den Fall komplexer Gleichungen durch sinngemäße Übertragung von Abb. 6 geben.

6. Das Newtonsche Verfahren. Wir machen eine Anwendung unserer Bedingung für gute Konvergenz. Oft muß eine vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ zur iterativen Auflösung erst auf die Gestalt $x = \varphi(x)$ gebracht werden. Dazu gibt es stets sehr viele Möglichkeiten; am einfachsten nimmt man $\varphi(x) = x + f(x)$ oder etwas allgemeiner

$$\varphi(x) = x + \lambda(x) \cdot f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

wo $\lambda(x)$ eine beliebige Funktion von x bedeuten darf. Unter den möglichen $\varphi(x)$ wollen wir ein $\varphi(x)$ aussuchen, das zu einem Iterationsverfahren mit möglichst *bequemem Einzelschritt* und möglichst *guter Konvergenz* führt[6]).

Damit der Einzelschritt bequem ausführbar ist, muß $\varphi(x)$ zu gegebenem x leicht berechenbar sein. Unser Ansatz (3) entspricht bei nicht zu verwickeltem $\lambda(x)$ im allgemeinen diesem Wunsche.

Die Festlegung von $\lambda(x)$ kann noch der Erzielung möglichst guter Konvergenz dienen. Nach den Betrachtungen in Nr. 5 sorgen wir dazu für möglichst flachen Verlauf der Kurve $y = \varphi(x)$, wenigstens in der Nähe der Wurzel X, und verlangen hierfür Verschwinden von $\varphi'(x)$ an der Stelle $x = X$. Wegen

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda'(x)\, f(x) + \lambda(x)\, f'(x)$$

heißt das

$$\varphi'(X) = 1 + \lambda(X)\, f'(X) = 0 .$$

Bei $f'(X) \neq 0$ wird das für jedes $\lambda(x)$ mit $\lambda(X) = -\dfrac{1}{f'(X)}$, am einfachsten also durch

$$\lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

erreicht. Das so aufgefundene Iterationsverfahren ist das *Newtonsche*:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

das sich bekanntlich auch unmittelbar anschaulich begründen läßt (Ersatz der Kurve durch die Tangente). Nach unseren Überlegungen muß es bei genügend gutem Ausgangswert *immer* konvergieren; denn wenn die Kurve $y = \varphi(x)$, wie durch $\varphi'(X) = 0$ gefordert, für die Wurzel wagerecht verläuft, so bleibt sie ein Stück weit in den seitlichen Winkelräumen unserer Konvergenzbedingung. Auch zur Aufsuchung von komplexen Wurzeln ist das Newtonsche Verfahren immer geeignet[7]).

Will man Differentialquotienten vermeiden, so nimmt man Differenzenquotienten und kommt z. B. zur Regula falsi. Ein rechnerisch besonders angenehmes derartiges Verfahren ist von Steffensen[8]) angegeben worden.

7. Verbesserung des Newtonschen Verfahrens. Wir wollen zu weiterer Konvergenzverbesserung den Ansatz (3) für $\varphi(x)$ schmiegsamer machen, um dann für $x = X$ außer wagerechter Tangente z. B. auch verschwindende Krümmung, also noch flacheren Verlauf der Kurve $y = \varphi(x)$ zu erzwingen. Wir fügen deshalb ein Glied $\mu(x)\, f^2(x)$ mit einem willkürlichen Faktor $\mu(x)$ hinzu:

$$\varphi(x) = x + \lambda(x)\, f(x) + \mu(x)\, f^2(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

[5]) So bei Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis (Berlin und Leipzig 1928, W. de Gruyter) S. 164; ähnlich bei C. Runge—H. König: Numerisches Rechnen (Berlin 1924, J. Springer) z. B. S. 174.

[6]) Der gleiche Ansatz für $\varphi(x)$ liegt bei R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer: Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM 9 (1929) 59 . . . 62 zugrunde. Die Verfasser achten jedoch mehr als wir auf Rechenbequemlichkeit. Sie wählen daher $\lambda(x)$ grundsätzlich konstant.

[7]) C. Isenkrahe: Anwendung iterierter Funktionen, Math. Ann. 31 (1888) 315 . . . 316.

[8]) J. F. Steffensen: Remarks on Iteration, Skand. Aktuarietidskrift (1933) 64 . . . 72.

Auch jede mit derartigem $\varphi(x)$ aufgeschriebene Gleichung $x = \varphi(x)$ wird durch Wurzeln X von $f(x) = 0$ befriedigt und kann als Umformung von $f(x) = 0$ gelten. Die angekündigten Bedingungen

$$\varphi'(X) = 0, \qquad \varphi''(X) = 0$$

werden durch alle Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ mit

$$1 + \lambda(X) f'(X) = 0, \qquad 2\lambda'(X) f'(X) + \lambda(X) f''(X) + \mu(X) 2 f'^2(X) = 0$$

erfüllt, also bei $f'(X) \neq 0$ am einfachsten durch

$$\lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)}, \qquad \mu(x) = -\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

Damit wird

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x)[f(x)]^2}{[f'(x)]^3} \quad \text{. . . . . (5).}$$

Die im Anschluß an das Newtonsche Verfahren mit diesem $\varphi(x)$ gebildete Iterationsformel[9])

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f'(x_n)[f(x_n)]^2}{[f'(x_n)]^3} \quad \text{. . . . . (6)}$$

ist für die Praxis durchaus nicht immer zu schwerfällig, besonders wenn die vorkommende zweite Ableitung bequem zu bilden ist (wie etwa im Falle der reduzierten kubischen Gleichung) und wenn man viele Stellen der Wurzel braucht.

Oft wird (6) schon mit einem Schritt die erwünschte Genauigkeit liefern. Bei mehreren Iterationsschritten läßt sich die Rechenarbeit, fast ohne Konvergenzverschlechterung, vermindern, wenn man $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ durch Konstanten, nämlich runde Näherungswerte λ_0 für $\lambda(x_0)$ und μ_0 für $\mu(x_0)$ ersetzt, worin x_0 eine beliebige, *nicht allzu schlechte* Ausgangsnäherung sein darf. Man arbeitet dann also mit der handlichen Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_0 f(x_n) + \mu_0 f^2(x_n).$$

Selbstverständlich konvergiert die Iteration nach dieser Formel trotz der Abänderung von $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ ebenfalls *genau* gegen X.

Es ist möglich, unter Verzicht auf Bequemlichkeit den Ansatz (4) für $\varphi(x)$ weiter zu vervollkommnen, indem man noch mehr Potenzen von $f(x)$ hinzunimmt und Faktoren so festlegt, daß immer mehr Ableitungen von $\varphi(x)$ für $x = X$ verschwinden. Man bekommt so immer bessere Konvergenz, da die φ-Kurven immer flacher werden. Die Schrittfunktionen sind Taylorpolynome, nämlich Abschnitte gewisser Bürmann-Lagrangescher Umkehrreihen von $y = f(x)$, genommen für $y = 0$ (Abb. 7)[10]).

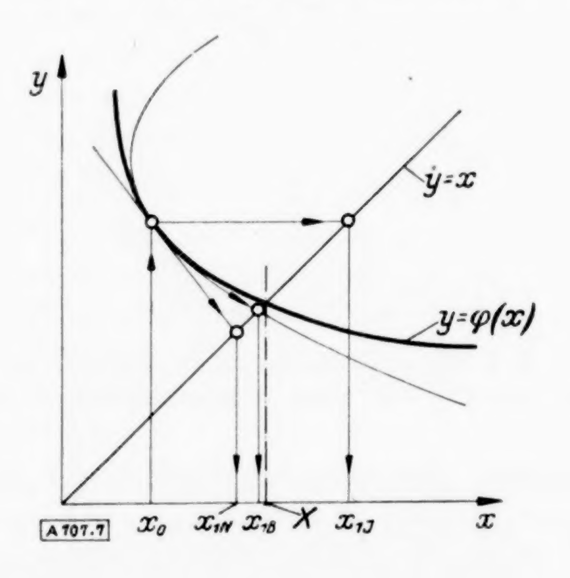


Abb. 7. Aus x_0 wird
x_{1J} durch gewöhnliche Iteration (Schritt wagerecht),
x_{1N} durch Newtonsche Iteration (Schritt längs Tangente),
x_{1B} durch Bürmann-Lagrangesche Iteration
(Schritt längs Parabel).

Wir wollen diesen Gedanken nicht weiter verfolgen, da es uns nur darauf ankam, als *Grundlage des iterativen Gleichungslösens* herauszustellen: *Zur Gewinnung einer Schrittfunktion bringt man die vorgelegte Gleichung irgendwie auf die Gestalt $x = \varphi(x)$. Die rechte Seite $\varphi(x)$ ist eine um so günstigere Schrittfunktion, je weniger sie von x abhängt.*

[9]) Vgl. hierzu und zum folgenden auch P. Montfort: Berechnung der Wurzeln einer numerischen Gleichung mit Hilfe einer Maclaurinschen Reihe, Z. math. naturwiss. Unterr. 64 (1933) 11 . . . 18.

[10]) Als Beispiel für eine andere Möglichkeit, flaches $\varphi(x)$ zu erreichen, vgl. Fr. A. Willers: Zum Newtonschen Näherungsverfahren, ZAMM 16 (1936) 315 . . . 316.

B. Unmittelbare geometrische Einkleidung der Picardschen Iteration bei Differentialgleichungen.

8. Picards Formel. Die Iteration bei gewöhnlichen Gleichungen wird uns bei der Behandlung der iterativen Auflösung von Differentialgleichungen leiten. Die nächstliegende Übertragung der Formel $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ zur Auflösung von $x = \varphi(x)$ führt auf das Picardsche Verfahren der sukzessiven Approximationen. Gegeben sei für $t \geqq 0$ die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = g(t, x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

mit der Anfangsbedingung

$$x = 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Zur Vorbereitung der Iteration formen wir (7) so um, daß links x allein steht, am einfachsten durch Integration mit Berücksichtigung von (8):

$$x(t) = \int_0^t g(\tau, x(\tau))\, d\tau .$$

Hier entspricht die rechte Seite der Schrittfunktion $\varphi(x)$ bei der gewöhnlichen Iteration. Setzt man rechts statt $x(\tau)$ eine Näherungsfunktion $x_n(\tau)$ ein, so erscheint links eine (im allgemeinen bessere) Näherung $x_{n+1}(t)$. Damit die so entstandene *Picardsche Formel*

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t g(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

für ein möglichst großes t-Intervall sinnvoll ist, setzen wir $g(t, x)$ für alle $t \geqq 0$ als stetig erklärt voraus.

9. Geometrische Ausdeutung im Richtungsfeld. Die Differentialgleichung (7) ordnet jedem Punkte der t, x-Ebene eine Steigung $g(t, x)$ zu, welche die Richtung einer etwa durch den Punkt hindurchlaufenden Lösungskurve $X(t)$ festlegt (Abb. 8). Wir deuten die Steigung in

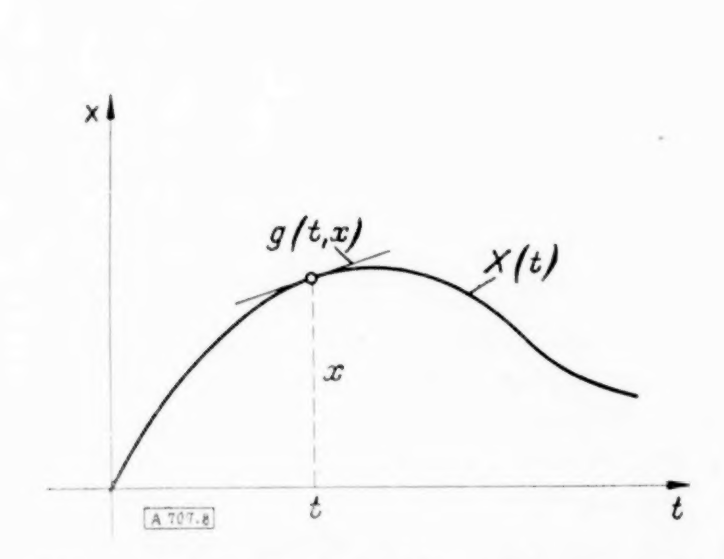


Abb. 8. Im Punkte t, x der Lösungskurve $x = X(t)$ von $\dot{x} = g(t, x)$ verlangt die Differentialgleichung die Steigung $g(t, X(t)) = g(t, x)$.

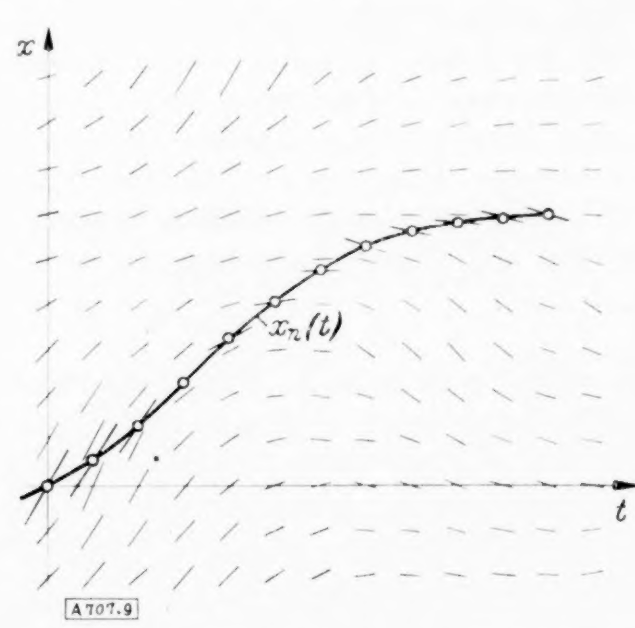


Abb. 9. Richtungsfeld. Feldelemente („Spickstrecken") auf einer Näherungslösung $x_n(t)$.

ausgewählten Punkten der Ebene je durch ein „Feldelement", ein Geradenstück dieser Richtung, an (Abb. 9). Die gegebene Näherung $x = x_n(t)$ zeichnen wir in das so gewonnene „Richtungsfeld" ein. Sie trägt ∞^1 Feldelemente („Spickstrecken", Abb. 9), deren Steigung durch $g(t, x_n(t))$, also durch den Integranden der Picardschen Formel gegeben wird. Was bedeutet nun die Integration von $g(t, x_n(t))$ in (9)? Anschaulich gesprochen entsteht durch Integration einer Funktion $f(t)$ eine Kurve, deren Steigung bei der Abszisse t gleich $f(t)$ ist. Die Integration in (9) führt demnach zu einer Kurve mit der Steigung $g(t, x_n(t))$ an der Stelle t, also zu einer Kurve, die für jedes t gerade die Steigung des Feldelementes auf $x_n(t)$ hat (Abb. 10). *Die Picardsche Iterierte $x_{n+1}(t)$ ist an jeder Stelle dem abszissengleichen Feldelement von $x_n(t)$ parallel*[11]).

[11]) Eine derartige geometrische Übersetzung der Picardschen Iteration scheint, obwohl sie nur geläufige geometrische Bilder verwendet, bisher nur von Vietoris benutzt worden zu sein. Vgl. z. B. L. Vietoris: Ein einfacher Integraph, ZAMM 15 (1935) 238 . . . 239.

Wir können uns das Kurvenbild von $x_{n+1}(t)$ geradezu aus den Feldelementen auf $x_n(t)$ entstanden denken. Wir verschieben dazu, bei $t=0$ beginnend, der Reihe nach jedes Feldelement von $x_n(t)$ auf der hindurchgehenden Ordinatenlinie, bis sein Schnittpunkt mit dem

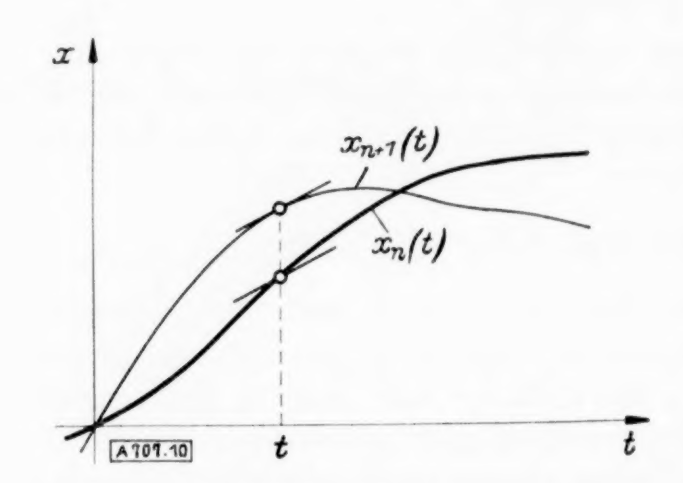


Abb. 10. Die Feldrichtung auf $x_n(t)$ ist Tangentenrichtung an die Picarditerierte $x_{n+1}(t)$.

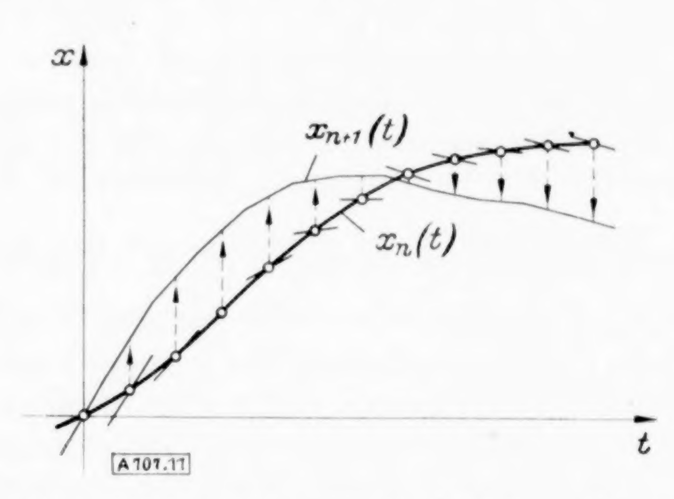


Abb. 11. Kettenbildung aus den Feldelementen von $x_n(t)$ liefert die Picarditerierte $x_{n+1}(t)$.

vorangehenden Element etwa mitten zwischen den beiden Elementen liegt (Abb. 11). Nur das Element in 0,0 bleibt liegen. Während die Feldelemente sich auf $x_n(t)$ dachziegelartig überdecken, stoßen sie nach der Verschiebung mit stumpfen Winkeln wie Kettenglieder aneinander. Wir sprechen daher statt von Integration der Steigungen $g(t, x_n(t))$ auch anschaulich von *Kettenbildung* aus den Feldelementen von $x_n(t)$. Änderung der Anfangsbedingung würde Wahl eines anderen Ansatzpunktes als 0,0 für die Kette, also Hebung oder Senkung der Kette im ganzen bedeuten (Integrationskonstante).

Wir können jetzt sagen: *Die Picardsche Formel* (9) *ordnet einer beliebigen Kurve $x=x_n(t)$ als neue Näherung $x=x_{n+1}(t)$ die im Ursprung beginnende Kette der auf $x_n(t)$ liegenden Feldelemente zu.*

10. Einfluß des Integranden in Picards Formel auf die Konvergenz. Die geometrische Deutung setzt uns instand, die Wirkung der Picardschen Formel anschaulich zu verfolgen. Wir können wieder die Abb. 8 bis 11 heranziehen. Die Lösung der in Abb. 9 dargestellten Differentialgleichung ist die Kurve $X(t)$ in Abb. 8; sie „paßt" auf das Richtungsfeld Abb. 9. Die Richtungselemente auf $x_n(t)$ (Abb. 10, 11) schließen sich nach Kettenbildung zu einer augenscheinlich besseren Näherung $x_{n+1}(t)$ zusammen; die neue Kurve $x_{n+1}(t)$ kommt der Lösung $X(t)$ offenbar näher als die alte $x_n(t)$.

Suchen wir aus den Abbildungen eine Begründung für diese Verbesserung abzulesen, so fällt sofort auf: Die Kurve $x_{n+1}(t)$ ist der Lösung $X(t)$ deswegen so ähnlich, weil die Feldelemente auf $x_n(t)$, aus denen $x_{n+1}(t)$ durch Kettenbildung entsteht, den jeweils abszissengleichen Feldelementen der Lösung $X(t)$, d. h. den Tangenten der Lösung sehr nahe parallel sind. Kettenbildung aus den Feldelementen von $X(t)$ würde wieder $X(t)$ ergeben, Kettenbildung aus wenig veränderten Feldelementen ergibt daher eine nahe bei $X(t)$ liegende Kurve.

Nach dieser Betrachtung ist es für die Konvergenz des Picardschen Verfahrens vorteilhaft, wenn das Richtungsfeld auf Ordinatenlinien $t=$ konst möglichst wenig veränderlich ist. Formelmäßig heißt das: einer kleinen Ordinatenänderung $\Delta x = x - X$ soll eine möglichst kleine Änderung $\Delta g = g(t,x) - g(t,X)$ der Feldsteigung entsprechen. Wir können diese Forderung als Verschärfung der Stetigkeitsvoraussetzung für $g(t,x)$ ansehen, die $\Delta g \to 0$ bei $\Delta x \to 0$ verlangt.

Daß wir bei geringer Feldveränderlichkeit gute Konvergenz des Picardschen Verfahrens erzielen werden, bestätigt der Extremfall: $\Delta g = 0$ für alle Δx. In diesem Fall ist $g(t,x)$ eine Funktion $g(t)$ von t allein. Die Differentialgleichung heißt $\dot{x} = g(t)$, und schon der erste Picardschritt führt von beliebiger Ausgangsnäherung $x_0(t)$ aus zur genauen Lösung

$$X(t) = x_1(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau .$$

Die konvergenzverbessernde Forderung „möglichst kleines Δg für kleines Δx" kann, wenn man sie auf die ganze t,x-Ebene oder flächenhafte Teile davon erstreckt, hinsichtlich der Größenordnung von Δg nicht zu weit getrieben werden. Schon die Annahme, daß Δg von kleinerer Größenordnung als Δx ist:

$$\Delta g = o(\Delta x),$$

bedeutet

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = 0,$$

also Differenzierbarkeit von $g(t, x)$ nach x mit dem besonderen Wert 0 der Ableitung. Die Annahme läßt also nur den gerade erwähnten Extremfall $g(t, x) = g(t)$ übrig; wir können Δg nicht unter die Größenordnung von Δx herabdrücken, ohne von vornherein den Anwendungsbereich der Picarditeration allzusehr zu beschneiden.

Aber schon wenn man Δg von der Größenordnung von Δx annimmt:

$$\Delta g = O(\Delta x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

hat man eine Formulierung für geringe Feldveränderlichkeit mit x, gegen die vom praktischen Standpunkte aus nichts mehr einzuwenden ist; z. B. erfüllen alle nach x differenzierbaren Funktionen die Bedingung (10). In Form einer Ungleichung geschrieben lautet (10):

$$\left|\frac{\Delta g}{\Delta x}\right| \leq L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

wobei die Schranke L noch von der Bezugsstelle t, X abhängen darf. Um (11) möglichst bequem zur Abschätzung der größten Feldabweichung bei vorgegebenem Größtabstand zwischen $x_n(t)$ und $X(t)$ verwenden zu können, ist es allerdings zweckmäßig, L als konstant anzunehmen. Auch (11) mit konstantem L ist *praktisch* fast immer erfüllt, jedenfalls wenn wir die Konvergenzuntersuchung auf einen passenden endlichen Bereich beschränken. Wir sind zur *Lipschitzbedingung* gelangt; sie ergibt sich anschaulich und naturgemäß aus der Forderung möglichst guter Konvergenz des Picardschen Verfahrens.

11. Einfluß der Integration. Nachdem wir damit den Einfluß des Integranden in der Picardschen Formel oder, geometrisch gesprochen, den Übergang von $x_n(t)$ zu den Feldelementen auf $x_n(t)$ untersucht haben, müssen wir noch den zweiten Teil des Picardschrittes, die Kettenbildung, und ihren Einfluß auf die Konvergenz untersuchen. Dieser Einfluß ist beträchtlich.

Den Grund dafür zeigt schon die einfachste Integralabschätzung. Ist $f(t)$ eine integrierbare Funktion mit

$$|f(t)| \leq k,$$

so läßt sich ihr Integral

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

durch

$$|F(t)| = k \cdot |t|$$

abschätzen. Diese Formel enthält z. B. den tieferen Grund für die bekannte Tatsache, daß „*Integrieren glättet*". Eine „Störung" $f(t)$, die sich einer zu integrierenden Funktion überlagert, braucht nach der angegebenen Formel eine gewisse Zeit t, bis sie sich beim Integral einigermaßen bemerkbar machen kann. Bei hinreichend kurzer Dauer verursacht die Störung nach ihrem Ende nur eine geringfügige Parallelverschiebung des Integrals. Beschränkt man den Vergleich einer fehlerbehafteten Funktion und ihres Integrals auf ein genügend kurzes t-Intervall, so ist die Fehlerschranke des Integrals beliebig viel günstiger als die der Funktion, in etwas überspitzter Formulierung: ***Integration wirkt auf Fehler wie Multiplikation mit einer sehr kleinen Zahl***[12]).

Daraus erklärt sich übrigens auch, weshalb im sog. Heavisidekalkül „Potenzreihenentwicklungen" nach $\frac{1}{p}$ (Symbol für Integration) verwandt werden; bei genügend kleinem Integrationsintervall lassen sich diese symbolischen Reihen durch gewöhnliche Potenzreihen mit beliebig kleinem Argument, also meist leicht beweisbarer Konvergenz, abschätzen (vgl. später).

Für unsere Konvergenzuntersuchung des Picardschen Verfahrens finden wir: Hat man aus dem Fehler von $x_n(t)$ mit der Lipschitzbedingung (11) eine Abschätzung für den Feldfehler auf $x_n(t)$ hergeleitet, so folgt daraus durch „Multiplikation mit einer sehr kleinen Zahl"

[12]) Umgekehrt können noch so kleine Integralfehler von beliebig großen Störungen herrühren: „*Differenzieren rauht auf.*"

eine Abschätzung für den Fehler von $x_{n+1}(t)$. D. h. *bei Beschränkung auf ein hinreichend kurzes t-Intervall ist $x_{n+1}(t)$ wesentlich besser als $x_n(t)$.* In Formeln ergibt unser Gedankengang bei $0 \leqq t \leqq T$ und

$$\max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - X(t)| = k_n$$

die übliche Fehlerschätzung

$$\max_{0 < t \leq T} |x_{n+1}(t) - X(t)| = k_{n+1} \leqq k_n \, L \, T.$$

Verbesserung tritt z. B. ein, wenn wir t höchstens gleich $\frac{1}{2L}$ werden lassen. Wiederholte Anwendung liefert dann $k_n \leqq 2^{-n} k_0$ und damit Konvergenz der Picarditerierten $x_n(t)$ gegen die Lösung $X(t)$.

12. Zusammenfassung. Unsere Hervorhebung der für die Konvergenz wichtigen Punkte macht deutlich, daß die Konvergenz des Picardschen Verfahrens auf der gleichen Grundlage beruht wie die Konvergenz der Iteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ bei der gewöhnlichen Gleichung $x = \varphi(x)$. Wir hatten dort, um gute Konvergenz zu erzielen, die Schrittfunktion $\varphi(x)$ so eingerichtet, daß sie möglichst wenig von x abhängt. Die Picardsche „Schrittfunktion" ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{p} g(t, x),$$

wobei wir das schon erwähnte Symbol $\frac{1}{p}$ für die Integration nach t mit der Anfangsbedingung $x = 0$ in $t = 0$ benutzen. Sowohl der „Vorfaktor" $\frac{1}{p}$ wie auch die Lipschitzbedingung beim Integranden sorgen für geringe Abhängigkeit der Picardschen Schrittfunktion von x.

C. Vergleich mit der linearen Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten

13. Iteration im Sonderfall. Beziehungen zum Heavisidekalkül. Recht interessant ist es, unseren Überlegungen äußerlich eine andere Gestalt zu geben.

Wir benutzen das Picardsche Verfahren zunächst nur zur Lösung der *linearen* Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} - a x = s(t)$$

mit konstantem a und in $0 \leqq t \leqq T$ stetiger Störungsfunktion $s(t)$. Hier ist es möglich, durch wiederholtes Anwenden der Picardschen Formel

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} a x_n + \frac{1}{p} s$$

(in der unter Nr. 11 und 12 erwähnten, von jetzt an öfters benutzten symbolischen Schreibweise) von $x_0(t)$ aus alle Glieder der Näherungsfolge $x_1(t), x_2(t), \ldots$ explizit anzugeben:

$$x_1 = \frac{a}{p} x_0 + \frac{1}{p} s,$$

$$x_2 = \frac{a^2}{p^2} x_0 + \frac{a}{p^2} s + \frac{1}{p} s,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{a^n}{p^n} x_0 + \left(\frac{a^{n-1}}{p^n} + \frac{a^{n-2}}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{p}\right) s.$$

Dabei haben wir mehrfache Integrationen durch Potenzen von $\frac{1}{p}$ angedeutet und den gemeinsamen Integranden s der letzten Integrale nur einmal geschrieben. Unsere Regel, daß $\frac{1}{p}$ bei Beschränkung auf ein hinreichend kurzes t-Intervall als beliebig kleine Zahl anzusehen

ist, lehrt beim ersten Blick, daß bei kleinem t Grenzübergang $n \to \infty$ eine differenzierbare Funktion

$$X^* = \left(\frac{1}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a^2}{p^3} + \cdots\right) s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ergibt. Durch Einsetzen dieser Reihe in die Differentialgleichung und Nachprüfen der Anfangsbedingung überzeugt man sich, daß X^* die gesuchte Lösung X ist.

Die aufgeschriebene Reihe (12) ist die im Heavisidekalkül gegebene Lösung. Wir erkennen also, daß *Heavisides Methode* zur Lösung der linearen Differentialgleichung genau *mit der Picardschen Methode der sukzessiven Approximationen übereinstimmt.*

Summieren wir die rechts in der runden Klammer stehende „geometrische Reihe" formal auf, so ergibt sich

$$X = \frac{1}{p-a} s,$$

als wenn man in der Differentialgleichung

$$p X - a X = s$$

(p bedeutet Differentiation nach t) links einfach X ausklammern und die Gleichung durch den „Faktor" $p-a$ „dividieren" dürfte.

In schlechten Einführungen in den Heavisidekalkül erscheint diese Division manchmal als „Begründung" der Reihenentwicklung (12) und wird dann zu Recht von mathematischer Seite angegriffen. Auch in dieser Vorgehensweise steckt jedoch ein richtiger Kern. Man braucht die Division durch $p-a$ nur als formale Umschreibung der Differentialgleichung anzusehen, genau wie z. B. die Schreibweise des Zahlenbruchs $\frac{5376}{139}$ im Grunde genommen nur sagt, daß die Gleichung $139\,x = 5376$ gelöst werden soll. Wir sehen den Quotienten erst dann als zahlenmäßig bekannt an, wenn die Division „ausgeführt", d. h. der Quotient in einen Dezimalbruch entwickelt ist. Wählen wir ein einfacheres Zahlenbeispiel, etwa $\frac{1}{9}$, so können wir wörtlich mit dem *gleichen Algorithmus* die Entwicklung von $\frac{1}{p-a} s$ und $\frac{1}{10-1}$ durchführen und die Glieder der Reihenentwicklungen X^*, bzw. 0,1111 ... erhalten. Auf Grund der *gleichen Identitäten* entstehen geometrische Reihen mit den Quotienten $\frac{a}{p}$, bzw. $\frac{1}{10}$ (die als einfacher gelten als die zu berechnenden Quotienten), und wir erkennen die Konvergenz der Reihen in beiden Fällen aus der Kleinheit des Quotienten, „Kleinheit" im Falle $\frac{a}{p}$ im oben umschriebenen Sinne verstanden.

Macht man sich das klar, so erhält der Weg über die formale Division durch $p-a$ und die formale Reihenentwicklung von $\frac{1}{p-a}$ einen präzisen Sinn. Der Heavisidekalkül sieht bei dieser Betrachtungsweise weniger geheimnisvoll aus als in den erwähnten schlechten Darstellungen, die unbekümmert ohne Erklärung dividieren, — aber auch weniger geheimnisvoll als in manchen strengen Darstellungen, die auf schwierigen Wegen zur Reihe (12) und zu „deren abgekürzter Schreibweise" $X^* = \frac{1}{p-a} s$ mit ihrer „sonderbar" einfachen formalen Beziehung zur Differentialgleichung vordringen.

14. Bemerkungen zur Konvergenz. Im rechnerisch durchsichtigen Fall der linearen Differentialgleichung läßt sich ein besonders guter Einblick in die Art der Konvergenz des Picardschen Verfahrens gewinnen. Wir haben bisher Konvergenz allgemein nur für *irgend* ein t-Intervall nachgewiesen. Hier können wir sogar das *ganze* Konvergenzintervall angeben: *Die Reihe* (12) *konvergiert in jedem endlichen an* 0 *anschließenden* t-*Intervall, in dem* $s(t)$ *beschränkt ist.* Für

$$|s(t)| \leq M$$

ist nämlich bei $a \neq 0$, $t > 0$ die Reihe

$$M\left[t + |a| \frac{t^2}{2!} + |a|^2 \frac{t^3}{3!} + \cdots\right] = M \frac{e^{|a|\,t} - 1}{|a|}$$

eine Majorante von (12). Ist also z. B. $s(t)$ für alle endlichen t stetig, so konvergiert die Picardsche Iteration ebenfalls für alle endlichen t.

Die Iteration bringt allerdings *nicht mit jedem Schritt eine Verbesserung.* Das lehrt schon das einfache Beispiel $\dot{x}=x$ mit $a=1$, $s(t)\equiv 0$ und der Lösung $X(t)\equiv 0$, wenn man als Ausgangsnäherung $x_0(t)=t$ nimmt und t-Werte über 2 betrachtet. Dann ist $x_1(t)=\frac{t^2}{2}$. Im Intervall $0\leqq t\leqq T$ ist der größte Abstand von der angestrebten Lösung gleich T für $x_0(t)$ und gleich $\frac{1}{2}T^2$ für $x_1(t)$. Wegen $\frac{1}{2}T^2>T$ für $T>2$ ist $x_1(t)$ schlechter, sogar beliebig viel schlechter als $x_0(t)$, wenn man ein hinreichend großes t-Intervall zugrunde legt. Die Konvergenz kommt bei großen t-Werten erst durch später, für höhere n, einsetzende Verbesserung zustande.

Man übersieht andererseits wie in Nr. 11, auch allgemein für $\dot{x}=ax+s$, daß *schon der erste Schritt* eine etwa bekannte *Fehlerschranke verkleinert,* wenn man sich auf das Intervall $0\leqq t\leqq b<\frac{1}{|a|}$ beschränkt.

Es läßt sich aber *kein Intervall* angeben, in dem nicht nur die Fehlerschranke, sondern sogar der *Fehler selbst* für jedes t bei beliebig vorgegebenem $x_0(t)$ durch einen Picardschritt verkleinert wird. Wir haben dazu zu zeigen, daß für jedes $T>0$ irgendwo im Intervall $0\leqq t\leqq T$ bei passend vorgegebenem $x_0(t)$ die Ungleichung

$$|x_1-X|>|x_0-X|$$

besteht. Wir betrachten wieder das Beispiel $\dot{x}=x$ mit $a=1$, $s\equiv 0$, also $x_1(t)=\int_0^t x_0(\tau)\,d\tau$. Nimmt man x_0 stetig so an, daß es für $0<t<t_0<T$ positiv, für $t\geqq t_0$ aber 0 ist (Abb. 12),

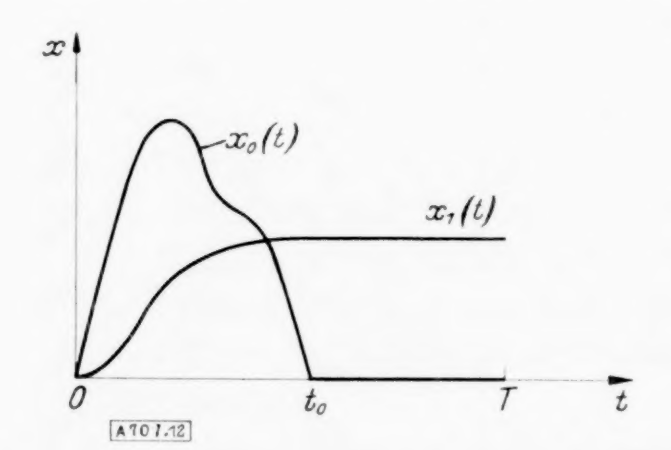


Abb. 12. Zwischen t_0 und T ist $x_1(t)$ schlechter als $x_0(t)$.

so wird x_1 für jedes $t>0$ positiv, also wegen $X(t)\equiv 0$ für jedes $t>t_0$ schlechter als x_0. Für jedes t-Intervall, das mehr als einen Punkt enthält, kann man also x_0 so einrichten, daß es in einem Stück dieses Intervalles schlechter als x_1 ist.

15. Anwendung auf nicht-lineare Differentialgleichungen. Es liegt nahe, für möglichst viele Differentialgleichungen die Frage nach der Konvergenz der Iteration auf den übersichtlichen Fall der linearen Differentialgleichungen zurückzuführen. Man sichert für irgendeine vorgegebene Differentialgleichung $\dot{x}=g(t,x)$ die Konvergenz, indem man eine lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}=ax+s$$

mit schlechterer Konvergenz aufsucht. Wir deuten im folgenden an, ob und wie es möglich ist, eine derartige Vergleichsdifferentialgleichung zu finden.

Konvergenzvergleich heißt Fehlervergleich. Um insbesondere aus dem Fehler 0 bei der linearen Ersatzgleichung sofort auf den Fehler 0 bei der vorgelegten Gleichung schließen zu können, muß man die Lösung $X(t)$ von $\dot{x}=g(t,x)$ auch zur Lösung von $\dot{x}=ax+s$ machen. Das ist für jedes a durch passende Wahl der Störungsfunktion $s(t)$ möglich:

$$s(t)=\dot{X}-aX.$$

Geometrisch bedeutet das: Längs der durch 0,0 gehenden Lösungskurve $X(t)$ sollen die beiden Richtungsfelder $\dot{x}=g(t,x)$ und $\dot{x}=ax+s$ übereinstimmen.

Es handelt sich noch darum, eine passende Konstante a zu finden. Aus der Reihe (12) liest man ab, daß mit wachsendem $|a|$ die Konvergenz schlechter wird. Geometrisch gibt a die Feldveränderlichkeit auf den Linien $t=$ konst. Je größer $|a|$ ist, desto rascher drehen

sich die Feldelemente beim Durchwandern einer x-Parallelen. Bei linearen Differentialgleichungen ist also die Feldveränderlichkeit in x-Richtung für die Konvergenzstärke der Iteration verantwortlich.

Man vermutet danach, daß die Konvergenz auch für nicht-lineare Differentialgleichungen $\dot{x} = g(t, x)$ um so schlechter ist, je größer der Steigungsunterschied

$$g(t, x) - g(t, X)$$

in der Nähe der Lösung werden kann. Ein lineares Richtungsfeld mit schlechterer Konvergenz müßte demnach so eingerichtet werden, daß der entsprechende Unterschied

$$(a\,x + s) - (a\,X + s) = a\,(x - X)$$

durchweg größer ausfällt[13]):

$$a\,|x - X| > |g(t, x) - g(t, X)|.$$

Wenn das möglich ist, d. h. wenn es möglich ist, eine Konstante a zu finden, welche diese Ungleichung befriedigt, dann ist unser Ziel erreicht, eine lineare Differentialgleichung mit schlechterer Konvergenz anzugeben und die Konvergenz des Iterationsverfahrens auch für $\dot{x} = g(t, x)$ zu sichern. Als Konvergenzbedingung hat sich damit gerade wieder die Lipschitzbedingung (11) eingestellt (statt L jetzt a). Als geometrische Bedeutung der Lipschitzbedingung ergibt sich: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $\dot{x} = g(t, x)$ wird so eingeschränkt, daß es ein stärker x-veränderliches lineares Feld, also ein Feld der besonderen Art von Abb. 13 gibt. Noch anschaulicher spricht man den Sinn der Lipschitzbedingung umgekehrt aus: In Abb. 14 sind in den Feldpunkten t, x die Steigungen angedeutet, welche

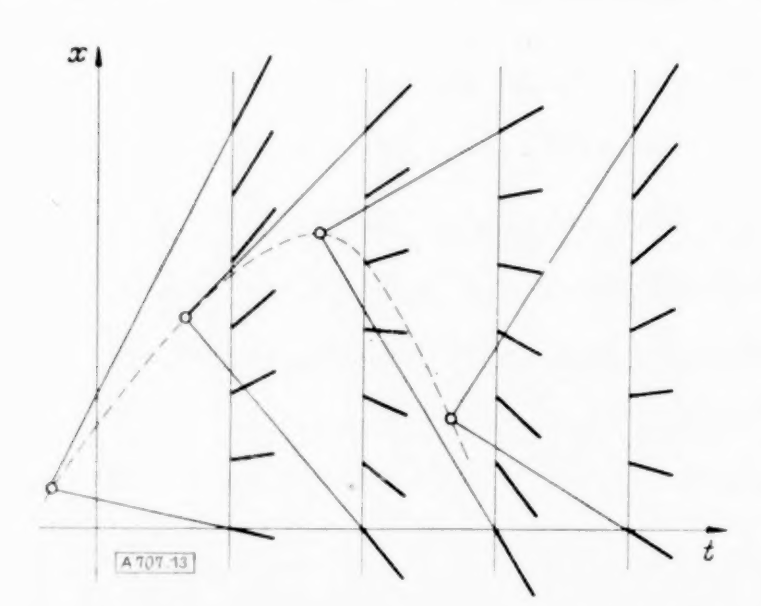


Abb. 13. Lineares Feld $\dot{x} = a\,x + s\,(t)$. Für jede Senkrechte schneiden sich alle Feldelemente in einem Punkt.

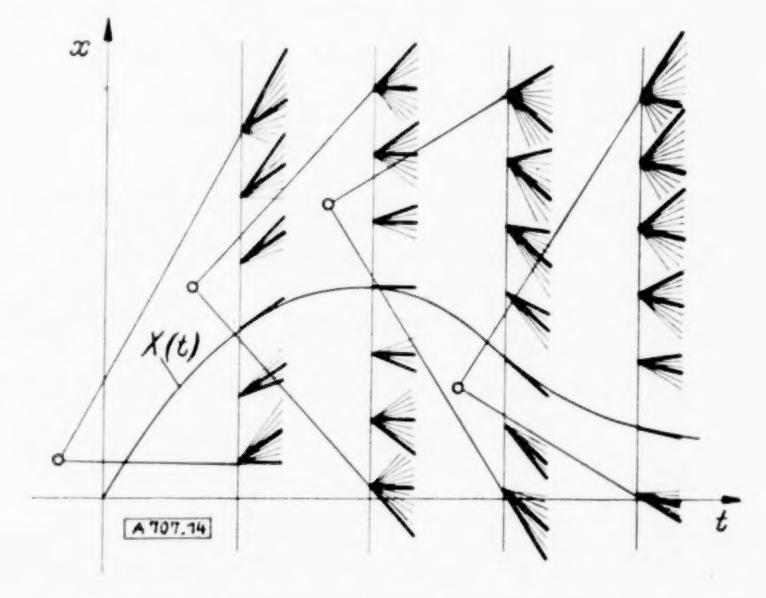


Abb. 14. Zur Deutung der Lipschitzbedingung.

bei festem t weniger von der Lösungssteigung $\dot{X}(t)$ abweichen als die jeweilige Feldsteigung $\dot{x} = a\,x + s\,(t)$ nach Abb. 13; *jedes Feld $\dot{x} = g(t, x)$ aus Büschelrichtungen hat mindestens so gut konvergente Picarditeration wie das lineare Feld.*

Die Iteration konvergiert, solange im linearen Feld $s\,(t)$, d. h. solange X und $\dot{X}$ endlich sind. Daß in Lehrbüchern oft nur Konvergenz in einem kürzeren Intervall ausgesagt wird, dessen Grenze mit der Lipschitzkonstanten zusammenhängt, rührt daher, daß man nicht nach Konvergenz überhaupt, sondern nach Verbesserung von Fehlerschranken *bei jedem Schritt* fragt. Nach dem auf S. 351 Gesagten ergibt sich daraus eine Intervallbeschränkung. Nebenbei macht diese Intervallbeschränkung es überflüssig, die Endlichkeit von X und $\dot{X}$ noch besonders vorauszusetzen.

Grundlage für die Konvergenz der Iteration bei linearen Differentialgleichungen bildete die von der Picardschen Formel geforderte Integration. Die Übertragung auf nicht-lineare Differentialgleichungen erfordert geringe Feldveränderlichkeit. In beiden Bedingungen erkannten wir in Abschnitt B die Forderung geringer x-Veränderlichkeit der Picardschen „Schrittfunktion" $\varphi(x) = \dfrac{1}{p}\,g(t, x)$.

[13]) Natürlich kann man sich das mit geometrischen Überlegungen wie in Nr. 10 noch deutlicher machen.

Vorträge der Hauptversammlung in Bad Kreuznach der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Von den auf der Versammlung in Bad Kreuznach am 17. und 18. September gehaltenen Vorträgen bringen wir im folgenden die Titel bzw. die von den einzelnen Vortragenden selbst zur Verfügung gestellten Vortragsauszüge. Die vollständige Veröffentlichung einzelner Vorträge bleibt vorbehalten.

Verfahren zur Bestimmung von Größe und der Ursache des Widerstandes eingebauter Flugzeugkühler.

Von *W. Barth* in Friedrichshafen a. B.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Entwicklung eines einfachen Verfahrens zur Ermittlung der Größe und Ursache des Widerstandes eingebauter Flugzeugkühler. Es wird gezeigt, daß bei bekannter Kühlluftmenge, Fluggeschwindigkeit, Druck in der Kühlluftaustrittsöffnung und gegebenen Abmessungen die Größe des Widerstandes annähernd bestimmt werden kann.

Abb. 1 stellt einen normalen Kühlereinbau dar. Es mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

v = Geschwindigkeit,
v_a = Geschwindigkeit im Kühlluftaustrittsquerschnitt,
v_K = Geschwindigkeit im freigedachten Kühlerquerschnitt,
v_o = Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,
p = Druck,
p_a = Druck in der Kühlluftaustrittsöffnung,
p_o = Druck in der ungestörten Strömung,
Δp_i = gesamter Energieverlust beim Durchströmen der Kühlerverkleidung,
Δp_K = Druckverlust im Kühlerelement,
F_K = Stirnfläche des Kühlerelementes,
F = Stirnfläche der Kühlerverkleidung,
W = Widerstand des eingebauten Kühlers,
F_a = Fläche der Kühlluftaustrittsöffnung,
ϱ = Luftdichte,
V = Kühlluftmenge in der Zeiteinheit.

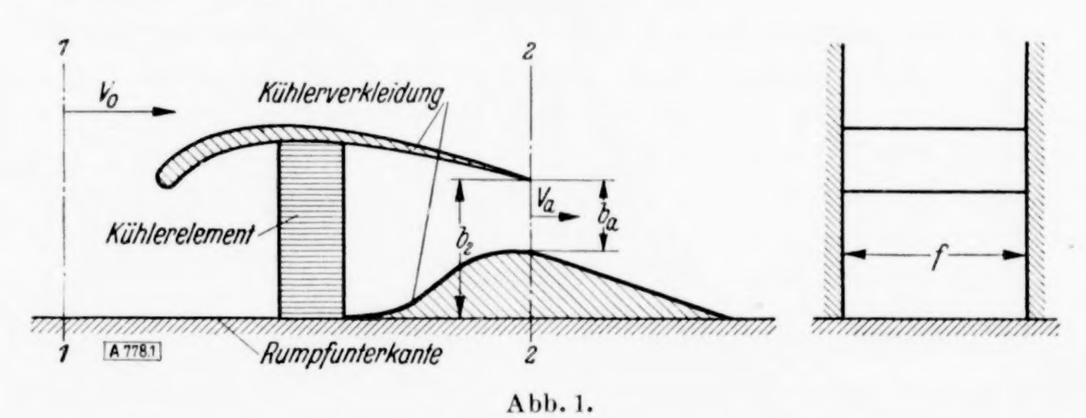


Abb. 1.

Mit den Indizes 1, 2 werden die Zustandsgrößen in den einzelnen Schnittebenen 1 — 1, 2 — 2, mit den Indizes x, y werden die Komponenten der Geschwindigkeit in den Koordinatenrichtungen x, y bezeichnet (vgl. Abb. 1).

Mit Hilfe des Impulssatzes errechnet sich der Kühlerwiderstand für den Fall $b_2 = b_a$ wie folgt:

$$W = f\int_0^\infty (p_1 + \varrho \cdot v_{1x}^2)\, d\,y - f\int_0^\infty (p_2 + \varrho \cdot v_{2x}^2)\, d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Es wird nun angenommen, daß in den Stromfäden außerhalb der Kühlerverkleidung keine Verluste bei der Energieumsetzung auftreten; somit wird

$$\int_{b_2}^\infty \left(p_1 + \frac{\varrho}{2}(v_{1x}^2 + v_{1y}^2)\right) - \int_{b_2}^\infty \left(p_2 + \frac{\varrho}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2)\right) = 0 \,.$$

Die Geschwindigkeit und der Druck in der Kühlluftaustrittsöffnung sei bekannt und praktisch über den ganzen Querschnitt konstant. Die Kühlluft möge senkrecht zur Austrittsöffnung abströmen und habe keine Geschwindigkeitskomponente in Richtung der y Achse. Die Schnittebene 1 — 1 denkt man sich zweckmäßigerweise so weit nach vorne verlegt, daß für p_1 und v_1 der Druck und die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung eingesetzt werden kann.

Zur Bestimmung des Kühlerwiderstandes werden nun die gleichen Überlegungen, wie sie von Betz [1,5] zur Ableitung der Beziehungen für das bekannte Impulsmeßverfahren verwendet worden sind, durchgeführt. Der Widerstandskörper wird jedoch nicht wie bei Betz durch eine Quelle, sondern durch eine bestimmte Quellen- und Senkenverteilung ersetzt. Die Ergiebigkeit Q dieser Quellen- und Senkenverteilung muß, damit die Kontinuitätsbedingung erfüllt ist, folgenden Wert annehmen:

$$\Sigma Q = f \int_0^{b_2} (v_2^* - v_a)\, d y \qquad (2),$$

wobei unter v_2^* die Geschwindigkeit dieser gedachten Potentialströmung längs der Schnittebene 2 — 2 zu verstehen ist, die außerhalb der Verkleidung gleich dem Wert der Geschwindigkeit v_2 werden muß. An diese Quellen- und Senkenverteilung ist weiter die Forderung zu stellen, daß die Geschwindigkeit am Ende der Kühlerverkleidung in der Kühlluftaustrittsöffnung einen bestimmten Wert annimmt und keine Komponente in Richtung der y Achse aufweist. Diese Forderungen können erfüllt werden, wenn man sich auf einer Parallelen zur y Achse eine gewisse Quellenverteilung und dazu um die Achse 2 — 2 gespiegelt eine entsprechende Senkenverteilung der gleichen Stärke angeordnet denkt. Der Abstand und die Verteilung der Quellen bzw. Senken wird so gewählt, daß die Geschwindigkeit über die Breite der Kühlluftaustrittsöffnung $v_2^* = v_a^* =$ konstant ist und mit der Geschwindigkeit v_2 unmittelbar an der Verkleidung übereinstimmt. Der Vortrieb der Quellen W errechnet sich dann nach (2) zu

$$W = -\Sigma Q (v_0 + w) \qquad (3),$$

wobei unter w die durch die Quellen und Senken verursachte Zusatzgeschwindigkeit am Ort der Quellen verstanden werden soll.

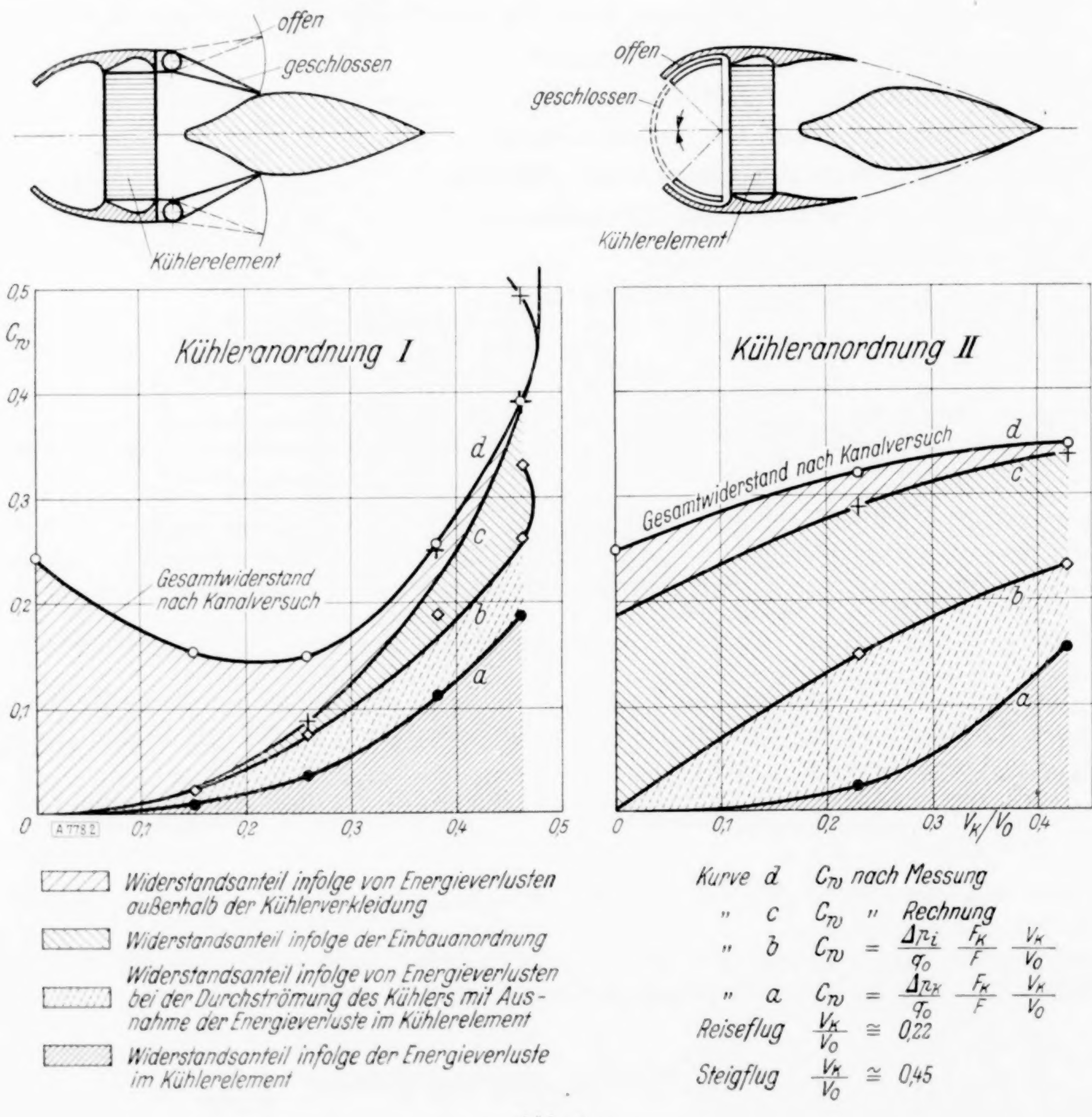


Abb. 2.

Für w kann ungefähr gesetzt werden

$$w \simeq \frac{v_a^{\circledast} - v_0}{4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Für den Kühlerwiderstand findet man

$$W = \frac{\varrho}{2} F_a \left[v_a^{\circledast 2} - v_0^2 - 2\, v_a^2 + 2 \cdot v_a\, v_0 + (v_a^{\circledast} - v_0) \left(\frac{v_a^{\circledast} + v_a}{2} - v_0 \right) \right] \quad \ldots \quad (5),$$

wobei

$$\frac{\varrho}{2} v_a^{\circledast 2} = (q_0 - p_a); \quad \frac{\varrho}{2} v_a^2 = (q_0 - p_a - \Delta p_i); \quad \frac{\varrho}{2} v_0^2 = q_0 \quad \ldots \quad (6).$$

Eine ähnliche Beziehung für den Kühlerwiderstand ist an anderer Stelle abgeleitet worden [3].

Die Beziehung (5) gilt auch für den Fall $b_2 > b_a$. In diesem Fall ist zu dem nach Formel (5) ermittelten Widerstand noch die Kraft hinzuzufügen, welche auf das durch die Linie 2 — 2 und die x Achse herausgeschnittene Ende der Verkleidung ausgeübt wird, wenn im Innern der Verkleidung der Druck der ungestörten Strömung angenommen wird.

Die Durchführung des Verfahrens soll nun an einem Beispiel gezeigt werden. In Abb. 2 sind zwei Kühleranordnungen dargestellt, die mit Endscheiben versehen in natürlicher Größe im Windkanal der Dornier-Werke untersucht wurden. Die beiden Anordnungen unterscheiden sich nur dadurch, daß einmal die Regulierung der Kühlluftmenge durch Schließen der Klappen vor dem Kühler, das andere Mal durch Schließen der Klappen hinter dem Kühler vorgenommen wird. Der Widerstand, die Kühlluftmenge, der Druck in der Kühlluftaustrittsöffnung und das Druckgefälle im Kühlerelement wurden ermittelt und in Tafel I zusammengestellt. Die Widerstandsbeiwerte wurden mit Hilfe von Formel (5, 6) aus Druck und Kühlluftmenge errechnet. Da $b_2 > b_a$, müßte eine Korrektur angebracht werden, die jedoch das Ergebnis kaum beeinflußt und daher weggelassen wird. Es zeigt sich, daß die gerechneten und die gemessenen c_w-Werte bei Kühleranordnung 1 fast in dem ganzen Bereich, bei Kühleranordnung 2 bei großen Durchflußmengen bis auf einen kleinen Betrag übereinstimmen. Die Differenz ist dadurch zu erklären, daß die Voraussetzung verlustfreier Umströmung der Kühler-

Tafel I. Zusammenstellung der Versuchs- und Rechenergebnisse.

Kühlerklappenstellung	F_a m²	Meßwerte $\frac{\Delta p_i}{q_0}$	$\frac{\Delta p_K}{q_0}$	$\frac{p_a}{q_0}$	V bei $v_0 = 40$ m/s m³/s	c_w gemessen	Auswertung c_w gerechnet	$\frac{v_K}{v_0}$	η_i	η_e	η_a	η_g	
I	0,078	0,25	0,075	— 0,160	2,96	0,155	0,023	0,150	0,300	0,94	0,154	0,043	Kühleranordnung I
II	0,156	0,47	0,224	— 0,154	5,10	0,150	0,083	0,257	0,476	0,86	0,558	0,228	Kühleranordnung I
III	0,303	0,83	0,494	— 0,215	7,54	0,255	0,252	0,381	0,596	0,75	0,990	0,356	Kühleranordnung I
IV	0,451	0,94	0,717	— 0,222	9,10	0,400	0,391	0,460	0,764	0,66	0,980	0,480	Kühleranordnung I
V	0,504	1,19	0,724	— 0,340	9,14	0,770	0,494	0,462	0,608	0,656	0,640	0,244	Kühleranordnung I
Ia	0,396	1,06	0,182	— 0,170	4,59	0,320	0,289	0,231	0,172	0,510	0,902	0,373	Kühleranordnung II
IIa	0,396	0,91	0,620	— 0,225	8,46	0,350	0,342	0,427	0,678	0,562	0,978	0,176	Kühleranordnung II

Stirnfläche des Kühlers $F_K = 0{,}496$ m² Stirnfläche des eingebauten Kühlers $F = 0{,}828$ m²

Widerstandsbeiwert $c_w = \frac{W}{F \cdot q_0}$

Gesamteinbauwirkungsgrad $= \frac{\text{Leistungsverbrauch im Kühlerelement}}{\text{Tatsächlicher Leistungsverbrauch}} = \eta_a \cdot \eta_i \cdot \eta_e$

Einbauwirkungsgrad $\eta_e = \frac{\text{Leistungsverbrauch beim Durchfluß durch die Verkleidung}}{\text{Leistungsverbr. bei verlustfreier Strömung außerhalb der Verkleidung}}$

$= \frac{\Delta p_i}{q_0} \cdot \frac{v_K}{v_0} \cdot \frac{F_K}{F \cdot c_w}$ (nach Rechnung)

Durchflußwirkungsgrad $\eta_i = \frac{\text{Leistungsverbrauch im Kühlerelement}}{\text{Leistungsverbrauch beim Durchfluß durch die Verkleidung}} = \frac{\Delta p_K}{\Delta p_i}$

Umflußwirkungsgrad $\eta_a = \frac{\text{Leistungsverbr. bei verlustfreier Strömung außerhalb der Verkleidung}}{\text{Tatsächlicher Leistungsverbrauch}}$

$= \frac{c_w \text{ (nach Rechnung)}}{c_w \text{ (nach Messung)}}$

verkleidung nur angenähert erfüllt wird. Dies zeigt sich ganz deutlich bei der nahezu geschlossenen Klappe bei Kühleranordnung 1. Da hier die Strömung außen abreißt, wird der Widerstandsunterschied in diesem Bereich am größten.

Die durchgeführten Überlegungen gestatten nun eine Aufteilung des Widerstandsbeiwertes nach den Ursachen des Widerstandes, wie in Abb. 2 durchgeführt, vorzunehmen. Die Widerstandsbeiwerte wurden in Abhängigkeit von der Durchflußmenge aufgetragen. Kurve *a* stellt den Mindestwiderstand dar, der im allergünstigsten Fall zur Bestreitung der im Kühlerelement auftretenden Druckverluste gemäß den Energiegesetzen aufgewendet werden muß. Die Kurve *b* ergibt den Mindestwiderstand, wenn die gesamten Energieverluste bei der Durchströmung des Kühlers als unvermeidlich angesehen werden. Kurve *c* stellt unter der Annahme verlustfreier Umströmung der Kühlerverkleidung den errechneten und Kurve *d* den tatsächlich gemessenen Widerstandsbeiwert dar. Die Verhältnisse der einzelnen Widerstandsbeiwerte zueinander werden als Durchfluß-, Umfluß- und Einbauwirkungsgrad wie in Tafel I bezeichnet, definiert. Mit Hilfe der durchgeführten Überlegung kann Natur und Ursache des Kühlerwiderstandes festgestellt werden. Maßnahmen zur Verbesserung des Kühlerwiderstandes bei gleicher Kühlleistung lassen sich angeben [4]. 778

Literaturangaben.

[1] A. Betz: „Ein Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes", Z. f. M. 1925, S. 42.

[2] Lagally: „Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben", Z. f. M., Math. und Mech. 1922, S. 4[illegible]9.

[3] W. Barth: „Die Bestimmung des Widerstandes und der Durchflußmenge von Kühlern bei verschiedenen Einbauanordnungen", Luftfahrtforschung 1937, Bd. 14, S. 300.

[4] W. Barth: „Luftwiderstand und Kühlwirkung von Flugzeugkühlern", Jahrbuch 1937 der Lilienthalgesellschaft für Luftfahrtforschung.

[5] Prandtl-Tietjens: „Hydro- und Aeromechanik", Band II, S. 141 bis 145.

Über die Flüssigkeitsreibung umlaufender Scheiben, Zylinder und Zellenkörper.

(Nach Versuchen von O. Zumbusch, H. Behrens und H. Beer, vorgetragen von *H. Föttinger* VDI in Berlin.)

Das Problem der Flüssigkeitsreibung umlaufender achsensymmetrischer Körper in Gehäusen besitzt theoretisches Interesse: darüber hinaus ist es besonders im Turbomaschinenbau von Bedeutung. Es wurde in drei experimentellen Arbeiten einer eingehenden Behandlung unterzogen, wodurch sich das Gebiet teilt in Versuche mit Scheiben (Zumbusch), mit Zylindern (Behrens) und mit Körpern, die auf ihrem Umfang zellenförmige Vertiefungen der verschiedensten Art aufweisen (Beer). Der Einfluß verschiedener Oberflächenrauhigkeit der umlaufenden Körper und der Gehäuse wurde in den Kreis der Betrachtung mit einbezogen. Die letztgenannte Arbeit kann auch als Beitrag zur Rauhigkeitsfrage gedeutet werden, da sie Versuche mit Körpern gleichsam extrem gesteigerter Rauhigkeit bringt. Andererseits nimmt sie Bezug auf Fragestellungen der Praxis, da sie etwa die Verhältnisse bei Nullförderung einer Turbo-Arbeitsmaschine wiedergibt. Die Versuche wurden in den Jahren 1914 bis 1934 durchgeführt z. T. an der Technischen Hochschule Danzig, während der dortigen Tätigkeit des Vortragenden, z. T. am Institut für Technische Strömungsforschung der Technischen Hochschule Berlin.

Die Versuchsapparatur bestand aus dem auf einer zweifach gelagerten Welle befestigten umlaufenden Körper, welcher von einem stillstehenden Gehäuse umschlossen war, das Drehbewegungen in begrenztem Maße ausführen konnte und leicht beweglich in Kugellagern bzw. auf Pendelstützen gelagert war. Das Moment der Reibungskräfte kommt am Gehäuse in voller Größe zur Auswirkung und wurde durch einen Waaghebel gemessen. Eine wesentliche Verbesserung gegenüber älteren Versuchen wurde dadurch erzielt, daß die zwischen Gehäuse und Welle notwendige Stopfbüchse nicht wie üblich am Pendelgehäuse, sondern getrennt davon am festen Lagerkörper der Welle befestigt war. Die Abdichtung zwischen Stopfbüchse und Gehäuse wurde durch ein beim Einspielen der Waage in die Nullage spannungsfreies Gummischlauchstück vermittelt. Hierdurch wurde der unkontrollierbare Einfluß der Stopfbüchsenreibung völlig ausgeschaltet und die Genauigkeit der Messungen erheblich verbessert.

Scheiben. Die Versuche mit umlaufenden Scheiben überdecken ein ziemlich weites Gebiet der Reynoldsschen Kennziffer. Sie wurden mit Scheiben verschiedenen Durchmessers ($d = 400, 600, 800$ mm) durchgeführt, wobei die Versuchsflüssigkeiten Luft, Wasser, Melasse und Maschinenöl waren. Ursprünglich sollten die Messungen auch zum Nachweis des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetzes dienen, was aus dem Zeitpunkt ihrer Durchführung (1914) ver-

ständlich erscheint. In Abb. 2 einer Arbeit von Schultz-Grunow[1]) ist der Verlauf des Reibungsbeiwertes einer der zahlreichen Kombinationen unserer Versuche gegeben. Die Erwartung des allmählichen Überganges des laminaren in den turbulenten Strömungszustand (erwartet aus der Überlegung, daß das Einsetzen der Turbulenz allmählich von größeren nach kleineren Radien mit wachsender Umdrehungszahl erfolgt) wird ebenso wie die Genauigkeit der Messung durch die Figur bestätigt. Eingehend wurde die Wirkung des axialen Spaltes auf den Reibungsbeiwert untersucht. Auch hier bestätigte sich die theoretische Erwartung, daß das Minimum der Reibung bei einem ganz bestimmten Verhältnis Spalt zu Scheibendurchmesser auftritt. Im übrigen zeigte sich eine deutliche Abhängigkeit des Reibungsbeiwertes vom Spalt. Bei sehr eng werdenden Spalten wird der unter Voraussetzung laminarer Grenzschichten (Spurplatte) theoretisch ermittelte Reibungsbeiwert in großer Annäherung erreicht. Die beigefügte Abb. 1 gibt die Ergebnisse in gedrängter Darstellung wieder.

Auch die Größe des radialen Spaltes übt (naturgemäß in nicht einfacher Wechselwirkung mit dem axialen Spalt) deutlichen Einfluß aus, der sich summarisch als Wachsen des Reibungsbeiwertes mit wachsendem Gehäusedurchmesser unter Annäherung an einen Grenzwert kennzeichnen läßt.

Ferner wurden die Rauhigkeiten von Scheibe und Gehäuse variiert. Die dabei beobachteten Erscheinungen sind ähnlich den von der Rohrreibung her bekannten, d. h. mit zunehmender Rauhigkeit wird die rein quadratische Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von der Umlaufgeschwindigkeit bei kleinerem Re erreicht. Bei teilweiser Bearbeitung der Scheiben ist eine Glättung auf den äußeren Radien naturgemäß von besonderer Wirksamkeit und für die Praxis u. U. ausreichend.

Zylinder. In ähnlicher Weise wurden die Versuche mit Zylindern verschiedener Breite durchgeführt. Auch hier wurden radiale wie axiale Spalten variiert und versucht, Aufschluß über ihre Wechselwirkung zu gewinnen. Durch Abzug des Reibungsanteils der Seitenflächen (rechnungsmäßig aus den Ergebnissen der vorstehenden Untersuchung ermittelt) von der gesamten gemessenen Reibung wurden Beiwerte für die reine Zylinderreibung abgeleitet.

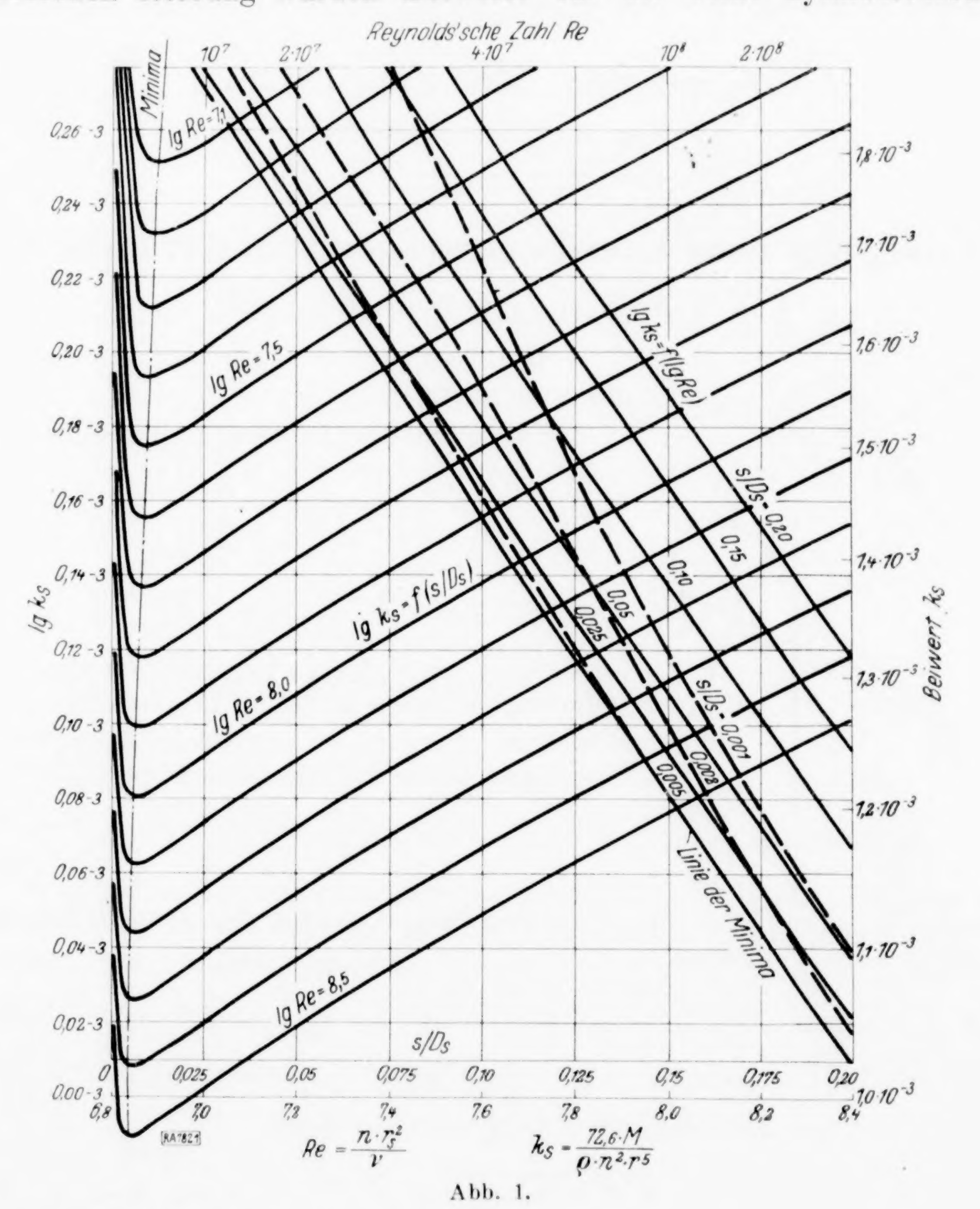


Abb. 1.

[1]) F. Schultz-Grunow: Ds. Ztschr., Bd. 15 (1935), S. 191.

Durch Bestreichen der Zylinder und Gehäuse mit nicht trocknender Farbe wurden die Grenzschichtstromlinien sichtbar gemacht. Es konnte unter anderem die zuerst von Taylor[2]) beobachtete Aufspaltung der Sekundärströmung an der Mantelfläche in symmetrisch gelagerte Wirbelzonen nachgewiesen werden.

Zellenkörper. Als Vorversuche zu den Untersuchungen mit umlaufenden Zellenkörpern wurde der Druckabfall in einem geraden Rohr von rechteckigem Querschnitt gemessen. Die größeren sich gegenüberliegenden Innenflächen des Rohres konnten durch eingesetzte Bleche zellenförmig unterteilt werden. Die Drucke wurden durch Wandanbohrungen an den glatten Seitenwänden gemessen. Es ergaben sich interessante Aufschlüsse über die Wirkung des Verhältnisses Teilung zu Lichtweite auf den Druckverlauf. Ferner verursachte der Winkel der eingesetzten Zellenwände stark unterschiedliche Strömungswiderstände. Verlief die Strömung „glattstreichend", so stellten sich geringere, verlief sie „spießend" (gegen den Strich), so stellten sich höhere (bis zu 7-fache) Verluste ein. Auch die Kantenzuschärfung der Zellenwände verursachte im Druckverlauf deutlich nachweisbare Veränderungen des Strömungsbildes.

Eine sehr große Anzahl (über 150) von Zusammenstellungen wurde darauf im Umlauf-Apparat durchgemessen. Verändert wurden Breite des Laufrades, Anzahl und Stellung der Schaufeln des Laufrades, Anzahl und Stellung der Schaufeln des Gehäuses und radialer Spalt zwischen Gehäuse und Laufrad. Die Ergebnisse entsprechen den Beobachtungen am geraden Kanal. Bei radialen und spießend gegeneinander laufenden Schaufeln ergeben sich hohe Drehwiderstände. Unter besonderen Bedingungen, insbesondere bei gleichen Schaufelzahlen von Läufer und Gehäuse und vornehmlich bei den Schaufelzahlen 6 und 9 wurde ein sprunghaftes starkes Anwachsen des Reibungsbeiwertes, vergleichbar einer Resonanzerscheinung, beobachtet. Bemerkenswert ist, daß dabei sehr hohe Reibungswiderstände erreicht werden. Als anschauliches Beispiel sei angeführt, daß ein Rad von 400 mm Ø und 100 mm Breite bei einer Umdrehungszahl von nur 1500 $\min^{-1}$ mehrere Hundert PS aufzunehmen vermag. 782

Erzeugung von Tragflächen*).

Von *A. Klose* in Berlin.

Der Übergang vom Kreisbogenträger zum geraden Träger.

Von *Konrad Ludwig* in Hannover.

Die Last auf der horizontalen Längeneinheit wird mit q bezeichnet.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$-P + \frac{dQ}{d\varphi} = qR\cos^2\varphi\,, \qquad \frac{dP}{d\varphi} + Q = -qR\sin\varphi\cos\varphi\,,$$

$$-RQ - \frac{dM}{d\varphi} = 0\,.$$

Bezeichnet man die von demselben Querschnitt wie der Polarwinkel aus gerechnete Bogenlänge der unverformten Mittellinie mit x, so werden diese Gleichgewichtsbedingungen beim Übergang zum geraden Träger

$$\frac{dQ}{dx} = q\,, \qquad \frac{dP}{dx} = 0\,, \qquad -Q - \frac{dM}{dx} = 0\,.$$

Ist q konstant, so ergibt sich als allgemeines Integral der Gleichgewichtsbedingungen bei Spezialisierung auf Symmetrie

$$P = K_1\cos\varphi - \frac{qR}{2} + \frac{qR}{2}\cos 2\varphi\,, \qquad Q = K_1\sin\varphi + \frac{qR}{2}\sin 2\varphi\,,$$

$$M = RK_1\cos\varphi + \frac{qR^2}{4}\cos 2\varphi + K_2\,.$$

[2]) G. J. Taylor: Phil. Trans. (A), Bd. 223 (1923), S. 289. Auch Verh. d. I. Intern. Kongresses f. angew. Mechanik, Delft 1924, S. 89.

*) Ein Manuskript des Vortragsauszuges ist der Schriftleitung nicht zugegangen.

Setzt man voraus, daß die Querschnitte eben, senkrecht zur verformten Mittellinie und ungedehnt bleiben, so ist nach Wilhelm Flügge: Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934, Seite 115, zweite Gl. (68)

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{h}{R(R+h)}\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{u}{R+h} + \frac{1}{R}\frac{d v}{d\varphi}.$$

Ist die Querschnittsbreite, die mit b bezeichnet wird, konstant, so folgt mit der Abkürzung $\mathfrak{Ar\,Tg}\frac{\delta}{R} - \frac{\delta}{R} = z$

$$P = \int_{-\delta}^{+\delta} \sigma_\varphi\, b\, d h = E b \int_{-\delta}^{+\delta} \varepsilon_\varphi\, d h = E b \left[2 z \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2\left(\frac{\delta}{R} + z\right) u + 2 \frac{\delta}{R}\frac{d v}{d\varphi}\right] \quad \ldots \quad (1),$$

$$M = -\int_{-\delta}^{+\delta} h\, \sigma_\varphi\, b\, d h = -E b \int_{-\delta}^{+\delta} h\, \varepsilon_\varphi\, d h = 2 R z b E \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right) \quad \ldots \quad (2),$$

worin $\frac{1}{R}\left(u + \frac{d v}{d\varphi}\right)$ die Dehnung der Mittellinie und $\frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right)$ der Zuwachs der Mittellinienkrümmung ist. Die Gl. (1) und (2) werden beim Übergang zum geraden Träger

$$P = E b\, 2 \delta \frac{d v}{d x}, \qquad M = E J \frac{d^2 u}{d x^2}.$$

Ist δ konstant, so ergibt sich als allgemeines Integral der Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten

$$u = \frac{1}{2 R z b E}\left(\frac{R}{2} K_1 \varphi \sin\varphi - \frac{q R^2}{12}\cos 2\varphi + K_2\right) + K_3 \cos\varphi,$$

$$v = \frac{1}{2 R z b E}\left[\frac{R}{2} K_1 (\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{q R^2}{24}\sin 2\varphi - K_2 \varphi\right] - K_3 \sin\varphi - \frac{q R^2}{4 b \delta E}\varphi$$
$$+ \frac{q R^2}{16 b \delta E}\sin 2\varphi - \frac{K_3}{2 b \delta E}\varphi.$$

Ist der Träger an den Stellen $\varphi = \pm\alpha$ in festliegenden Gelenken gehalten, so ist

$$K_1 = \frac{q R}{2}\left\{\delta\left[-\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha) + \frac{7}{6}\sin 3\alpha - \frac{3}{2}\sin\alpha\right]\right.$$
$$\left. + R z\left[-\alpha(\cos 3\alpha - 3\cos\alpha) - \frac{1}{2}(\sin 3\alpha + \sin\alpha)\right]\right\}$$
$$:\{\delta[2\alpha(2+\cos 2\alpha) - 3\sin 2\alpha] + 2 R z \alpha(1+\cos 2\alpha)\}$$
$$= \frac{q R}{2}\,\frac{\delta\left[-\frac{16}{15}\alpha^5 + \cdots\right] + R z\left[\frac{16}{3}\alpha^3 + \cdots\right]}{\delta\left[\frac{8}{15}\alpha^5 + \cdots\right] + R z[4\alpha + \cdots]}.$$

Hiernach wird beim Übergang zum geraden Träger

$$P = 0, \qquad Q = q x.$$

Bei diesem Grenzübergang wird von

$$z = \frac{\delta^3}{3 R^3} + z_5 \frac{\delta^5}{R^5} + z_7 \frac{\delta^7}{R^7} + \cdots, \qquad z_5 = \frac{1}{5}, \qquad z_7 = \frac{1}{7}$$

außer dem 1. Summanden für das Biegungsmoment und die Ringverschiebung der Summand mit z_5 und für die Radialverschiebung auch der Summand mit z_7 gebraucht. Doch im Ergebnis heben sich diese Summanden fort. 773

Grundsätzliches zur Frage der elastischen Stabilität[1]).

Von *K. Marguerre* in Berlin-Adlershof.

---

[1]) Eine ausführliche Veröffentlichung über den Gegenstand des Vortrages erscheint in Heft 1 des nächsten Jahrganges der Zeitschrift.

Zur Frage der Stabilität des Eisenbahngleises.

Von *Theodor Pöschl* in Karlsruhe.

Bei Eisenbahngleisen in geraden Strecken sind in einigen Fällen Verwerfungen in der Ebene der Fahrbahn und senkrecht dazu beobachtet worden, die eine Gefahr für den Betrieb darstellen und die im technischen Schrifttum der letzten Jahre vielfach behandelt worden sind. Die Erscheinung ist außerordentlich verwickelt und ist auch von Zufälligkeiten abhängig, so daß eine Theorie, die die Möglichkeiten ihres Auftretens darlegen will, nur eine allgemeine, summarische Beschaffenheit haben kann. Die Schwierigkeiten liegen vor allem in der Notwendigkeit, gewisse „Konstante" in die Betrachtung einführen zu müssen, die von vornherein nur die Bedeutung von Mittelwerten haben und deren zahlenmäßige Festlegung daher mit großen Unsicherheiten behaftet ist. Diese „Konstante", die die Beschaffenheit der ins Spiel tretenden mechanischen Systeme kennzeichnen sollen, sind die „Bettungszahl" c und die „Biegesteifheit" EJ des Gleises, als einheitlicher Verband betrachtet.

Vom Standpunkte der technischen Mechanik handelt es sich um die plastische oder unelastische Knickung eines elastisch gebetteten Stabes, der an beiden Enden als eingespannt anzusehen ist, nämlich dort, wo das ausgebogene Gleisstück in die gerade Strecke übergeht. Bezeichnet l die Länge dieses Gleisstücks, P die auf das Gleis wirkende Längskraft, und führt man die dimensionslosen Werte

$$2a = \varkappa^2 l^2 = \frac{P l^2}{EJ}, \qquad b^2 = \frac{c\, l^4}{EJ}$$

ein, so lautet die Grundgleichung des Problems

$$y^{(IV)} + 2a\, y'' + b^2 y = 0 .$$

Die Aufgabe kommt darauf hinaus, jene Werte von a bei gegebenem b und den Randbedingungen $y = y' = 0$ für $\zeta = 0$ und $\zeta = 1$ zu bestimmen, für welche diese Gleichung eine von $y = 0$ verschiedene Lösung hat. Das Ergebnis ist eine eindeutige Beziehung von der Form

$$2a = f(b),$$

die ein monotones Anwachsen von $2a$ mit b darstellt. Für die weitere Betrachtung ist es vorteilhaft, auch die beiden Funktionen

$$\frac{2a}{b^2} = \frac{P}{c\, l^2}, \qquad \frac{4a^2}{b^2} = \frac{P^2}{c\, EJ}$$

auszurechnen und in ihrer Abhängigkeit von $2a$ oder b aufzutragen. Mit Hilfe dieser Funktionen kann man unmittelbar aus d r e i von den vier Größen P, l, c, EJ die vierte ablesen.

Betrachtet man als maßgebend für den Eintritt der Verwerfung des Gleises das Erreichen der Streckgrenze des Schienenmaterials und macht man zunächst den nur sehr angenähert zutreffenden Ansatz

$$P = 2F\sigma_{-\varrho},$$

worin F den Schienenquerschnitt bedeutet, nimmt man ferner als Mittelwert aus verschiedenen Versuchen $c \approx 3\ \mathrm{kg/cm^2}$ und l aus Beobachtungen an natürlichen Gleisen oder an Versuchsstrecken als bekannt an ($l \approx 6$ bis $8\ \mathrm{m}$), so erhält man etwa

$$EJ = 6 \cdot 10^9\ \mathrm{kg\,cm^2};$$

dieser Wert würde die Ansicht bestätigen, daß das Gleis keineswegs als steifer Rahmen, sondern nur als eine bezüglich der Biegung ziemlich lose Verbindung der beiden Schienen zu betrachten ist.

Einen besseren Ansatz für die Knickkraft P erhält man durch genauere Ausrechnung der bei der Ausknickung auftretenden Biegespannung bei nur teilweiser Plastizierung der Randfasern des Schienenmaterials; hierzu ist notwendig, die e n d l i c h e Durchbiegung bei der Knickung durch Herabziehung der nichtlinearen Knickgleichung zu berechnen und das Gleichgewicht des durchgebogenen Stabes unter der Bedingung anzusetzen, daß die größte auftretende Spannung die Streckgrenze nicht überschreitet, oder besser, daß die Tragfähigkeit des Stabes in teilweise plastiziertem Zustande nicht erschöpft ist.

Als wichtigstes Mittel zur Sicherung gegen Verwerfungen der angegebenen Art kommt nach wie vor die Anbringung geeignet bemessener Dilatationsfugen (Stoßlücken) in Betracht; ferner wirken in diesem Sinne naturgemäß die Erhöhung der Biegesteifheit des Rahmenverbandes zwischen Schienen und Schwellen und die Verbesserung der Bindung zwischen Gleise und Bettung, sei es durch Verwendung von unterfüllten Hohlschwellen entsprechenden Ausmaßes, sei es durch Anbringung besonderer Verankerungen zwischen Gleise und Bettung, sowie schließlich die Verfestigung der Bettung selbst. Wieweit man hier gehen soll und gehen kann, bedarf besonderer, sorgfältigster Untersuchungen.

Eine ausführliche Darstellung der hier nur angedeuteten Theorie ist vom Verfasser in der Zeitschrift: „Gleistechnik und Fahrbahnbau", 13. Jahrgang 1937, Seite 157 bis 165, gegeben worden.

Schwingenflug mit Wirbelablösung.

Von *Werner Schmeidler* in Breslau.

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Aufgabe, die Kräfte auf eine beliebig bewegte und beliebig deformierte Tragfläche im Luftstrom zu berechnen, vorausgesetzt, daß es sich um periodische Bewegungen handelt. Es werden dabei sowohl die Längswirbel, die auf der Änderung der Zirkulation in Richtung der Spannweite beruhen, berücksichtigt, als auch die Querwirbel, die von der zeitlichen Änderung der Zirkulation herrühren. Für die von diesem Wirbelsystem stammende induzierte Abwärtsgeschwindigkeit wird ein Integral-Ausdruck angegeben, der einmal die Koeffizienten der flächenhaft verteilten Zirkulation am Flügel enthält, andererseits gewisse Kernfunktionen, die mit Hilfe der Funktion

$$\mathfrak{E}(\lambda, \sigma) = \int_0^{\mu_0} e^{i\sigma \operatorname{ctg}\mu} \sin\mu \, d\mu, \qquad \left(\operatorname{ctg}\mu_0 = \frac{\lambda}{\sigma}\right)$$

dargestellt werden. Diese Funktion genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \sigma} - \mathfrak{E} = -\left(\frac{3\lambda\sigma^2}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}^5} + \frac{i\sigma^2}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}^3}\right) e^{i\lambda}$$

und kann daher unter Berücksichtigung der Grenzwerte von $f(\lambda, \sigma)$ und $\frac{1}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\lambda, \sigma)$ für $\sigma \to 0$ durch Besselsche Funktionen wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathfrak{E}(\lambda, \sigma) = -\frac{\pi|\sigma|}{2} e^{i\lambda} \Bigg[i J_1(i|\sigma|) \int_0^{|\sigma|} \left(\frac{i}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}^3}\right) i\sigma H_0^{(1)}(i\sigma)\, d\sigma$$

$$+ H_1^{(1)}(i|\sigma|) \int_0^{|\sigma|} \left(\frac{i}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}^3}\right) \sigma J_0(i\sigma)\, d\sigma \Bigg] \qquad (\lambda > 0).$$

Für negatives λ gilt die Beziehung:

$$\mathfrak{E}(\lambda, \sigma) = \mathfrak{E}(0, \sigma) + \overline{\mathfrak{E}}(0, \sigma) - \overline{\mathfrak{E}}(-\lambda, \sigma),$$

wobei

$$\mathfrak{E}(0, \sigma) + \overline{\mathfrak{E}}(0, \sigma) = -\pi|\sigma| H_1^{(1)}(i|\sigma|)$$

wird.

Die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit zerfällt in zwei Teile, von denen der eine im wesentlichen von der Gesamtzirkulation um einen Flügelschnitt, der andere von der feineren Verteilung dieser Zirkulation in der Tiefenrichtung abhängt. Für den zeitlichen Mittelwert des instationären Widerstandes läßt sich ein Ausdruck in voller Allgemeinheit angeben.

Zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung hat man zu unterscheiden, ob dabei auch die feinere Verteilung in Tiefenrichtung bestimmt werden muß, oder ob die Berechnung der Gesamtzirkulation um den Flügelschnitt als Funktion der Spannweitenkoordinate und der Zeit genügt. Im ersten Falle liefert die Bedingung des tangentialen Verlaufs der Strömung längs der Fläche eine Integrodifferentialgleichung erster Art, im zweiten Falle erhält man mit Hilfe der Zirkulationsgleichung eine solche von der zweiten Art. Unter Benutzung der Theorie der beschränkten Gleichungssysteme von unendlich vielen Variablen läßt sich der erste Fall auf ein System von Integralgleichungen zweiter Art zurückführen, in denen nur noch die Tiefenkoordinate auftritt. Ihre Lösbarkeit läßt sich übersehen, obwohl die Durchführung im einzelnen noch näherer Untersuchung bedarf. Der zweite Fall kann ebenfalls mit Hilfe der unendlichen Gleichungssysteme behandelt werden. Er führt in direkter Verallgemeinerung der Prandtlschen Theorie zu einfachen Ausdrücken für Widerstand und Vortrieb und gestattet auch die Lösung des Variationsproblems, bei welcher Zirkulationsverteilung die Differenz von Vortrieb und Widerstand ein Maximum wird. Ist die Translationsgeschwindigkeit des Flügels groß gegen die sonst auftretenden Geschwindigkeiten, insbesondere gegen die Geschwindigkeiten infolge der Eigenbewegung des Flügels, so gehen die erhaltenen Gesetze für Zirkulation, Widerstand und Vortrieb in die früher vom Vortragenden in Spezialfällen aufgestellten Formeln über. 764

Beitrag zur Kenntnis des Schmiervorgangs unter Nutzbarmachung älterer Arbeiten der hydrodynamischen Theorie.

Von *G. Vogelpohl* VDI, Berlin.

Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin, Leitung: Prof. Dr.-Ing. H. Föttinger VDI.

1. Vorbemerkung. Trotz großer Forschungsarbeiten, namentlich auf dem Gebiet der physikalischen Chemie der Öle, ist es nicht gelungen, Klarheit über die den Schmiervorgang bestimmenden Größen zu schaffen. Die Ursache dafür sieht der Verfasser in dem Mangel unserer Kenntnisse über die Mechanik des Reibungsvorganges im Gleitlager.

Für die Eignung eines Schmiermittels wurde die Zähigkeit als die allein maßgebende Eigenschaft angesehen, die in die hydrodynamischen Gleichungen eingeht. Das ist jedoch nicht der Fall. So ließen sich auch nicht alle späteren Versuchsergebnisse mit der — meist für die ganze Lauffläche konstant angenommenen — Zähigkeit allein erklären. Der richtig ausgebauten hydrodynamischen Theorie gelingt dieses jedoch wahrscheinlich besser[1]) als den gegenwärtigen Bestrebungen der physikalischen Chemie. Letztere legt ihren Forschungen nur die erste Näherung — unendlich breites Lager, konstante Zähigkeit — der hydrodynamischen Lehre zugrunde, wie sie etwa bei Sommerfeld dargestellt ist. Nun ist aber zur Genüge bekannt, daß diese Fassung den Bedingungen in einem wirklichen Lager nicht hinreichend nahe kommt und z. T. zu recht befremdenden Folgerungen führt, wie das Vorhandensein eines Reibungsmoments in der Ruhe.

Daher hat der Verfasser wegen der großen Verbreitung der Sommerfeldschen Ergebnisse versucht, die Ansätze unter den der Wirklichkeit mehr entsprechenden Voraussetzungen auszuwerten. Zunächst ist die Frage geprüft, ob mehrere Lösungen existieren können, da in der Rechnung der vieldeutige Arkustangens auftritt. Das erwies sich als unzutreffend. Dagegen wird die Ursache für das Versagen gegenüber der Wirklichkeit in der Unterlassung einer zahlenmäßigen Durchrechnung gesehen.

2. Das ganz umschließende Lager. Bei einem ganz umschließenden wirklichen Lager ist die wesentlichste Voraussetzung nicht erfüllbar, nämlich daß das Schmiermittel den ganzen Raum zwischen Zapfen und Schale völlig ausfüllt (S. 121 und 191). Sommerfeld selbst

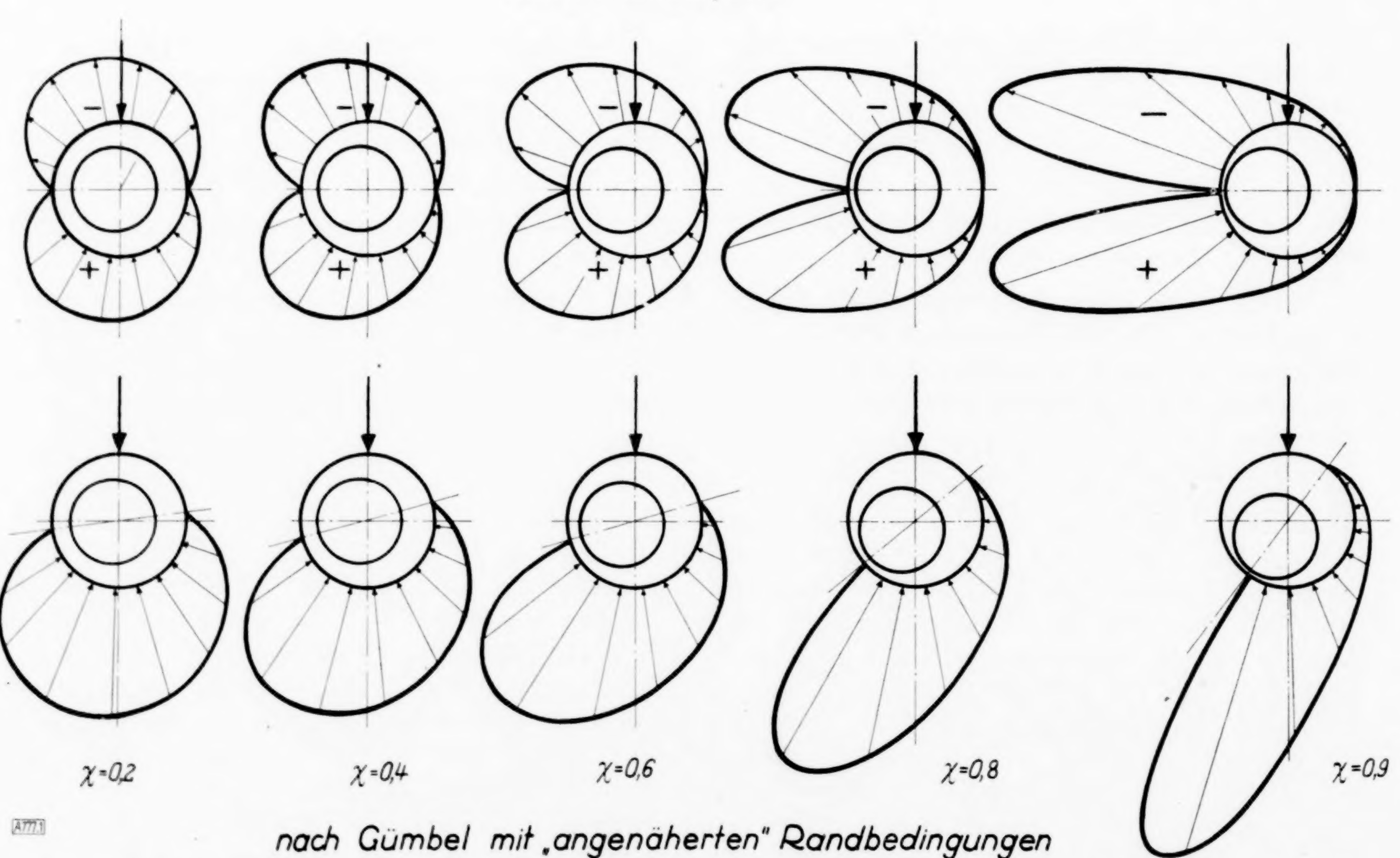


Abb. 1. Druckverteilung im ganz umschließenden Lager bei verschiedenen relativen Exzentrizitäten χ und gleichbleibender Last P. Das Produkt $\eta\omega$ aus Zähigkeit und Winkelgeschwindigkeit ist dabei so verändert zu denken, daß sich aus den Öldrücken stets dasselbe resultierende P ergibt.

[1]) Vgl. G. Vogelpohl, VDI-Forschungsheft Nr. 386, Berlin 1937. Dort ist auch das Schrifttum zu finden, soweit es hier nicht besonders angegeben ist. — Die hier weiterhin im Text in Klammern genannten Seitenzahlen beziehen sich auf Ostwalds Klassiker Nr. 218.

erwähnt die Grenzen dieser Voraussetzung: Das Auftreten der von der Rechnung geforderten Zugspannungen in der Flüssigkeit (S. 157, 158). Aber diese Grenzen werden nicht aus den entwickelten Gleichungen bestimmt, sondern willkürlich angenommen. Der Ausdruck für den Druckverlauf Gl. 57, (S. 154) wird nicht zahlenmäßig ausgewertet, sondern nur diskutiert[2]).

3. Brauchbare Auswertung. Es liegt daher nahe, nur die positiven Drücke zuzulassen. Die Druckentwicklung müßte an der weitesten Stelle des Schmierspaltes beginnen und an der engsten endigen.

Die Rechnung ist bereits von Gümbel ausgeführt. Jedoch war ihm nicht bekannt, daß seine mühsam graphisch-rechnerisch ermittelten Ergebnisse für den Druckverlauf schon durch die obengenannte Gl. (57) bei Sommerfeld gegeben waren. Die Formeln für Tragfähigkeit, Verlagerungswinkel usw. sind von Stieber gegeben[3]). Den Unterschied zwischen der Sommerfeldschen und Gümbelschen Annahme zeigt Abb. 1. Man sieht, daß im zweiten Fall die Komponenten der Drücke wesentlich mehr in die Lastrichtung fallen, wodurch sich namentlich bei großen Exzentrizitäten χ trotz niedrigerer Drücke im Öl eine höhere Tragfähigkeit ergibt.

Wären die Sommerfeldschen Ansätze in dieser Weise wie bei Gümbel ausgewertet worden, so hätte die Arbeit großen Nutzen für die Praxis bringen können. Der ging dadurch verloren, daß damals als Hauptergebnis der hydrodynamischen Theorie das von Stribeck beobachtete Reibungsminimum angesehen wurde, das sich nicht rein hydrodynamisch erklären läßt.

Für das endlich breite Lager hat Verfasser in dem genannten Forschungsheft für die beiden vorerwähnten Fälle einen Weg zur Behandlung mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens gezeigt. Ein Gebiet negativer Drücke folgt auch im Falle des ganz gefüllten Lagers, der in einem Modell mit gläserner Schale zur Sichtbarmachung der Strömungsvorgänge im Ölband physikalisch verwirklicht wurde. Es zeigte sich das Zerreißen der Ölschicht und Hohlraumbildung (Kavitation) an den Stellen und in dem Bereich, wo die Rechnung Zugspannungen fordert. Zugspannungen können in der Ölschicht im Lager nicht auftreten.

4. Die Grenzbedingungen. Die aus den Sommerfeldschen Voraussetzungen gefolgerten negativen Drücke lassen sich also nicht physikalisch verwirklichen. Gümbel hat daher durch andere Grenzbedingungen für das Ende des Druckverlaufs die Rechnung der Wirklichkeit besser anzupassen versucht und drei Bedingungen angegeben[4]):

1. Der höchste Druck tritt an der engsten Stelle des Schmierspaltes auf und fällt dort unstetig auf Null ab.

2. Die Druckentwicklung endet an der engsten Stelle des Schmierspaltes. Dann ist das Druckgefälle unstetig. Gümbel nennt diese die „angenäherten" Randbedingungen. Sie entsprechen der oben gegebenen Darstellung, der sich auch Stodola, Hummel und Duffing anschließen.

3. Der Druck wird an der Stelle Null, wo auch das Druckgefälle verschwindet, $p=0$ und $dp/d\varphi=0$ für das Ende der Druckkurve. Dann liegt der Höchstwert des Drucks symmetrisch zur engsten Stelle des Ölbandes, und hier ist der Druck gleich der Hälfte des Höchstdrucks. Mit dieser dritten Bedingung bleiben sowohl Druckverlauf als auch Druckgefälle stetig.

Wie in dem drucklosen Gebiet die Strömung verläuft, ob zwei- oder dreidimensional, ob mit oder ohne Bildung von Hohlräumen, ist nicht Gegenstand der Untersuchung. Die Reynoldssche Gleichung für die Druckentwicklung ist nur im Bereich positiver Drücke gültig. Damit verliert die Kritik von Duffing ihre Grundlage[5]). Die dritte Bedingung wird als unzutreffend angesehen, da nach einem Minimum notwendig ein Wiederansteigen des Druckes erfolgen müsse. Dabei wird übersehen, daß nur ein stetiger Übergang in das drucklose Gebiet gefordert wird, das die Reynoldssche Gleichung nicht mehr zu erfassen vermag.

Das Experiment scheint die dritte Bedingung zu bestätigen. Gümbel sah bereits in den Versuchen von Lasche eine Stütze, von späteren Messungen erhärten die von Stanton[6]) und Nücker diese Annahme. Sie ergaben die symmetrische Lage von Druckmaximum und Ende der Druckentwicklung zum engsten Querschnitt des Schmierspaltes und in diesem auch den Druck etwa gleich der Hälfte des Höchstdrucks. Dabei ist jedoch zu beachten, daß es sich um Messungen an endlich breiten Lagern handelt, bei denen man noch nicht weiß, ob die Linie $p=0$ für das Ende der Druckkurve überhaupt eine Erzeugende des Zylinders darstellt.

[2]) Weiteres findet man im Berichtswerk „Prüfen und Messen", Berlin 1937, S. 173. Vom Standpunkt der angewandten Mathematik aus ist dieser Fall interessant, da er zeigt, daß die bloße Diskussion einer Gleichung nicht genügt, sondern eine hinreichend genaue zahlenmäßige Auswertung erfordert.

[3]) W. Stieber, Das Schwimmlager, Berlin 1933, S. 61, Gl. 118 bis 123.

[4]) Wohl erstmalig zusammengestellt in Monatsbl. des Berl. Bezirksvereins Deutscher Ingenieure 1921, S. 125.

[5]) G. Duffing: Zschr. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924) S. 309. ETZ Bd. 48 (1925), S. 1865.

[6]) Th. Stanton: The Engineer Bd. 134 (1922), S. 598; Proc. Roy. Soc. London (A), Bd. 102 (1923), S. 241; Auszug in ZVDI Bd. 67 (1923), S. 469. Vgl. a. Th. Stanton: Engineering, Bd. 124 (1927) S. 312.

Besonders zu beachten ist, daß Reynolds schon die dritte Gümbelsche Bedingung aufgestellt hat: „Wenn man zu größeren Exzentrizitäten fortschreiten will, müssen die Grenzen von $-\Theta_1$ und $+\Theta_1$ auf $2\left(\Phi_0-\frac{\pi}{2}\right)-\Phi_1$ und $+\Theta_1$ abgeändert werden" (S. 94). Abb. 2 zeigt diese Grenzen zahlenmäßig für die Anwendung auf die Towerschen Versuche (S. 92, 93). Man sieht die symmetrische Lage von Druckmaximum und -minimum und das Ende der Druckentwicklung an der Stelle des Minimums. Die dritte Gümbelsche Bedingung würde daher besser als Reynoldssche Randbedingung bezeichnet. Diese wird also eigentlich schon durch die Druckmessungen von Tower bestätigt, jedoch ist dabei außerdem noch zu beachten, daß Tower nicht die Verlagerung der Welle gemessen hat, wie Stanton und Nücker.

Auch durch eingehendere theoretische Betrachtungen, wie die von Schiebel und Stieber, wird man auf die Reynoldssche Bedingung für das Ende der Druckkurve geführt.

Für den Anfang der Druckentwicklung sind die Bedingungen einfacher. Allerdings ist bei druckloser Ölzuführung in dem sich erweiternden Teil des Ölspaltes kein nennenswerter Druck zu erwarten. Die vielen von Stieber durchgerechneten Fälle für große Öleinlaufwinkel haben keine physikalische Bedeutung. Dasselbe trifft für die Behandlung der Vollschale bei Schiebel zu, die einem Öleinlaufwinkel von 180° im Sinne Stiebers entspricht, ferner für die Rechnungen bei Gümbel mit 270° Umschließungswinkel. In dem sich erweiternden Teil des Schmierfilms zeigen keinerlei Messungen irgendwelche Drücke, als äußerste Grenze für den Druckbeginn ist die größte Schmierspalthöhe anzusehen. Die dazugehörige Rechnung ist mit der Reynoldsschen Randbedingung (3. Gümbelsche) von Gümbel durchgeführt. Es sind aber wohl kleinere Öleinlaufwinkel und Druckentwicklungen auf nur einem kleinen Teil des Umfangs möglich, wie die erwähnten Messungen von Stanton zeigen und was auch aus neuesten Messungen der Verlagerungskurven für das Wellenmittel nach Beobachtungen von Clayton und Jakeman zu folgern ist.

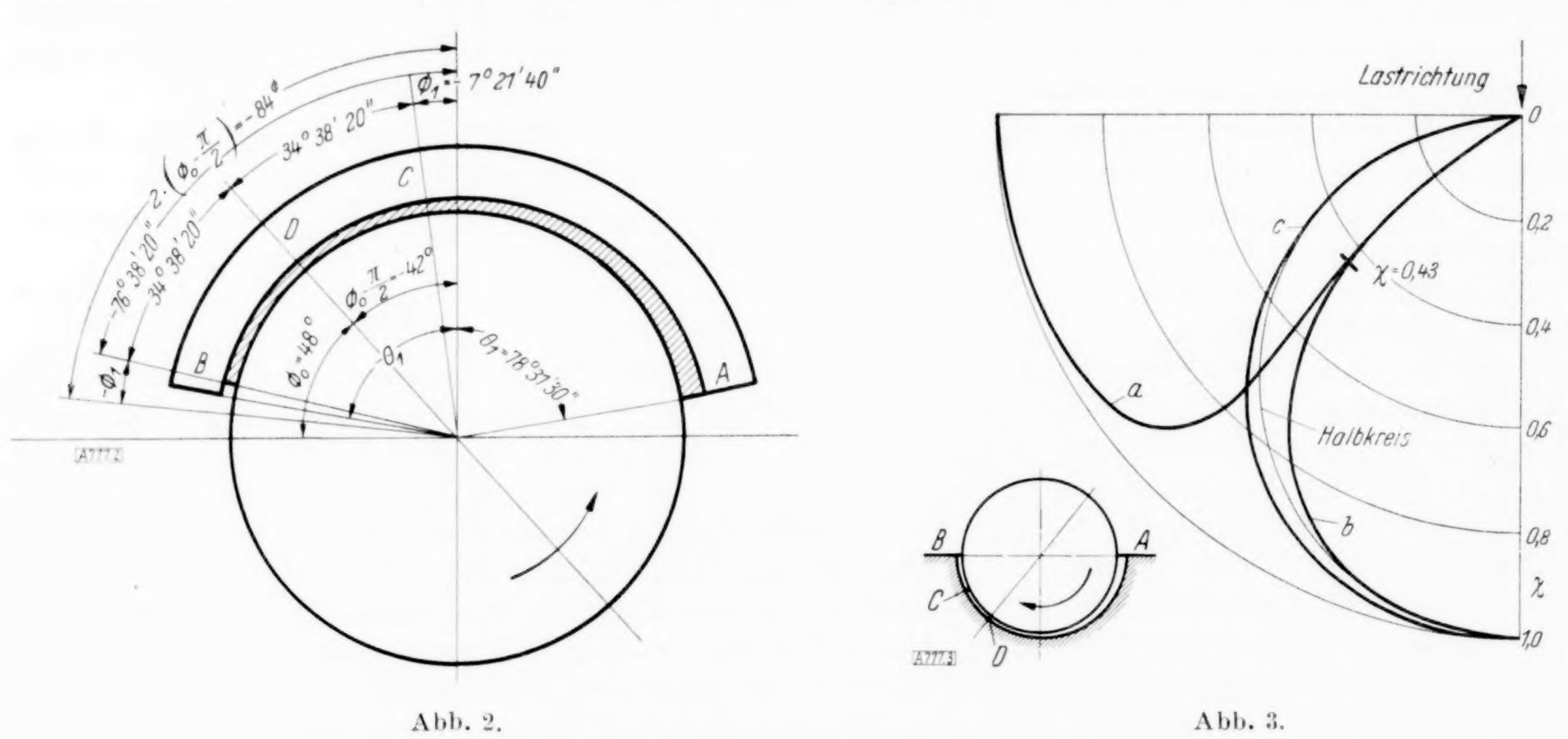


Abb. 2. Abb. 3.

Abb. 2. Randbedingungen nach Reynolds 1886. Punkt $A=\Theta_1$ Anfang, Punkt $B=2\left(\Phi_0-\frac{\pi}{2}\right)-\Phi_1$ Ende der Druckentwicklung. $B=$ Druckminimum, $C=$ Druckmaximum, B und C liegen symmetrisch zum engsten Querschnitt bei D. In Gl. 108 (S. 94) ist der Winkel für die Lage von B falsch, in der darunter stehenden Tafel II jedoch richtig angegeben.

Abb. 3. Verlagerung des Wellenmittels für die halbumschließende Lagerschale. Randbedingungen: Kurve a für $p=0$ in den Punkten A und B (Sommerfeld); Kurve b für $p=0$ in den Punkten A und C, wo $dp/d\varphi=0$ ist (Reynolds 1886, Gümbel 1921, Schiebel 1933, Stieber 1933); Kurve c für $p=0$ in den Punkten A und D, im engsten Querschnitt (Gümbel 1917).

5. Die Halbschale, Umschließungswinkel 180°. Dieser Fall wurde ebenfalls von Sommerfeld gerechnet. Auch hier sind negative Drücke zu erwarten, und zwar sicher für $\eta U/P\psi^2<0{,}14$, während für $\eta U/P\psi^2>0{,}29$ nur positive Drücke möglich sind. Die — von Sommerfeld nicht angegebene — genaue Grenze ist 0,271, die recht hohen Geschwindigkeiten oder sehr zähen Ölen bei geringen Exzentrizitäten entspricht. Das Fehlen einer zahlenmäßigen Bestimmung der zu erwartenden Größe der negativen Drücke gibt wieder kein klares Urteil über die Gültigkeitsgrenzen der Rechnung.

Um das Auftreten negativer Drücke zu vermeiden, ist auch hier die Anwendung anderer Bedingungen für das Ende der Druckkurve gegeben. Für die zweite Gümbelsche Voraussetzung ist die Rechnung von Gümbel durchgeführt, und für die Reynoldssche Bedingung wurden Lösungen von Schiebel, Stieber (Öleinlaufwinkel 90°) und Nücker gegeben.

Am meisten prägt sich der Einfluß der Randbedingungen in den zugehörigen Kurven für die Verlagerung des Wellenmittels aus, Abb. 3. Während durch das Auftreten negativer Drücke bei großen Exzentrizitäten wieder ein Anheben des Zapfens erfolgen müßte, Kurve *a* nach Sommerfeld, sinkt er bei der Reynoldsschen Randbedingung tiefer nach unten, Kurve *b*. Das Schmiermittel füllt nicht mehr den gesamten Raum zwischen Zapfen und Schale bis zu deren Ende in der Umfangsrichtung aus. Die Kurven *a* und *b* trennen sich gerade an der Stelle, wo das Eintreten negativer Drücke zu erwarten ist. Kurve *c* entspricht der zweiten Gümbelschen Bedingung, wenn der Druck an der engsten Stelle des Schmierspaltes Null ist. Daß der Charakter der halbkreisähnlichen Verlagerungskurve durch alle bisherigen Versuche weitestgehend bestätigt ist, darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden[6]).

Es mag nur noch die Gleichung für die Kurve *a* mitgeteilt werden:

$$\chi^2 = \frac{\gamma^2 \cos\gamma - 2\gamma \sin\gamma \cos^4\gamma - \sin^2\gamma \cos\gamma\,(2 - 3\cos^2\gamma)}{\gamma^2 \cos\gamma + \cos\gamma \sin^2\gamma - \gamma \sin\gamma\,(1 + \cos^2\gamma)},$$

die sich doch aus Gl. 66 (S. 162) ergibt; χ ist hier wie in Abb. 3 die relative Exzentrizität und γ der von Sommerfeld gebrauchte Hilfswinkel χ.

6. Zusammenfassung. Durch zahlenmäßige Auswertung der von Sommerfeld gegebenen Gleichung für die Druckverteilung im Ölband wird der Gültigkeitsbereich der Rechnungen bestimmt. Das Gebiet negativer Drücke umfaßt dabei den gesamten Bereich des sich erweiternden Schmierspaltes und nicht nur einen kleinen Teil. Die dadurch bedingten Änderungen führen auf die von Gümbel gegebene Darstellung. — Das von Sommerfeld errechnete Reibungsminimum ist in einem normalen Lager physikalisch nicht zu verwirklichen und liefert nicht die Erklärung für die Stribeckschen Beobachtungen.

Von den durch Gümbel aufgestellten drei Randbedingungen für das Ende der Druckkurve wird die dritte durch Versuche gestützt. Sie ist übrigens schon von Reynolds in den Rechnungen für die Towerschen Versuche angewendet.

Bei der Halbschale werden die Verlagerungskurven für das Wellenmittel nach Sommerfeld und die mit der Reynoldsschen Grenzbedingung verglichen. Beide trennen sich an der Stelle, wo negative Drücke aufzutreten beginnen.

Die hydrodynamische Theorie ist auch in ihrer ersten Näherung — ebene Strömung und konstante Zähigkeit — noch längst kein einheitliches und die Wirklichkeit zur Genüge beschreibendes Gebilde. Weit mehr trifft dieses zu, wenn man das endlich breite Lager behandelt und außerdem auch die Erwärmung durch die innere Reibung des Öls zu berücksichtigen versucht. Hier kann die Mechanik noch sehr weit ausgebaut werden. 777

Wellenwiderstand auf beschränktem Wasser.

Von *Georg Weinblum* in Berlin.

Havelock hat den Wellenwiderstand berechnet, den einfache Drucksysteme oder eine getauchte Doppelquelle bei gleichförmiger Bewegung in endlich tiefem Wasser erfahren; die Ergebnisse sind von verschiedenen Seiten dahin verallgemeinert worden, daß auch der Wellenwiderstand von Schiffsformen (Quellsystemen) auf flachem Wasser als Integral dargestellt werden kann. Die Diskussion der charakteristischen Gleichung $\mathfrak{Tg}\,\nu = \mathfrak{F}_h^2\,\nu$ ($\mathfrak{F}_h$ ist die auf eine Wassertiefe h bezogene Froudesche Zahl $c/\sqrt{g\,h}$) zeigt, daß ein von O. Schlichting[1]) vorgeschlagenes Verfahren zur Ermittlung des Flachwasserwiderstandes aus der Widerstandskurve für tiefes Wasser als erste Näherung brauchbar ist. — Das Verhalten des Flachwasserintegrals insbesondere im Gebiet $c_k = \sqrt{g\,h}$ der kritischen Geschwindigkeit wird erörtert; mit wachsendem Verhältnis Wassertiefe h zu Schiffslänge L entfernt sich die Lage des Maximums der Widerstandskurve von $\mathfrak{F}_h^2 = 1$ in Richtung kleinerer $\mathfrak{F}_h$ Werte; es wird gezeigt, weswegen der absolute Wert des Maximums durch Änderung der Schiffsform nicht nennenswert beeinflußt werden kann. Eine von Sretensky gegebene Lösung für den Wellenwiderstand von Schiffen in Rinnen endlicher Tiefe und Breite wird benutzt, um den Fehler in der Bestimmung des Wellenwiderstandes abzuschätzen, der bei Schleppversuchen infolge der beschränkten Querschnittsabmessungen der Tanks, insbesondere der Breite, entstehen kann. Es zeigt sich, daß bei den üblichen Modell- und Kanalgrößen die Seitenwände kaum nennenswerte Störungen hervorrufen; dagegen können solche entstehen, wenn die Modellänge etwa der Rinnenbreite gleich wird. Von größerem Einfluß kann die endliche Rinnenbreite bei Flachwasserversuchen werden; wegen der beschränkten Gültigkeit der Theorie im kritischen Bereich ist jedoch eine experimentelle Prüfung der analytisch ermittelten Ergebnisse notwendig. 765

[1]) Jahrb. Schiffb. Ges. Bd. 45 (1934).

Über Biegung und Stabilität eines doppelt gekrümmten Plattenstreifens.

Von *E. Weinel* in Jena.

Ein doppelt gekrümmter Plattenstreifen (Abb. 1) mit freien Rändern sei auf seinen Schmalseiten durch Biegungsmomente belastet. Solange die Beanspruchung der Platte hinreichend schwach ist, bietet die Fragestellung nichts Neues und gehört der elementaren Festigkeitslehre an; dabei ist es gleichgültig, ob man den Streifen als gekrümmten Balken oder als Schale ansehen will. Der elementaren Berechnung liegen wesentlich die folgenden Annahmen zugrunde:

1. Die Schubspannungen werden gegenüber den Biegungsspannungen vernachlässigt.
2. Die Gleichgewichtsbedingungen werden auf den undeformierten Zustand bezogen.
3. Die durch die Querkontraktion bedingte zusätzliche Verzerrung der Plattenmittelfläche bleibt außer Betracht.

Bei der im folgenden behandelten endlichen Deformation des gebogenen Plattenstreifens müssen die Annahmen (2) und (3) aufgegeben werden. Wohl aber darf angenommen werden, daß sich alle Plattenquerschnitte in der gleichen Weise verformen, daß also „reine Biegung" vorliegt; dazu ist notwendig, daß die das Biegungsmoment erzeugenden Spannungen in ganz bestimmter Weise über den Plattenquerschnitt verteilt sind. Diese Verteilung ergibt sich erst bei der Durchrechnung. Wird das Moment auf andere Weise in die Platte eingeleitet, so darf nach dem St. Venantschen Prinzip erwartet werden, daß die so bedingten Randstörungen schnell abklingen.

Hinsichtlich der Plattenabmessungen wird schließlich vorausgesetzt, daß einerseits der Krümmungsradius R_0 groß gegenüber der halben Plattenbreite $b/2$ und daß andrerseits die Plattendicke h klein sei gegenüber dem Krümmungsradius R_1. Im Sinn dieser Annahme werden in den folgenden Ansätzen nur die in (b/R_0) und (h/R_1) linearen bzw. quadratischen Glieder mitgeführt werden.

Als wesentliches Ergebnis der folgenden Rechnungen zeigt sich, daß der Zusammenhang zwischen dem wirksamen Biegungsmoment und der mittleren Krümmungsänderung nicht mehr linear ist, ein Resultat, das für die ebene Platte bereits von Timoshenko[1]) auf anderem Wege gewonnen wurde.

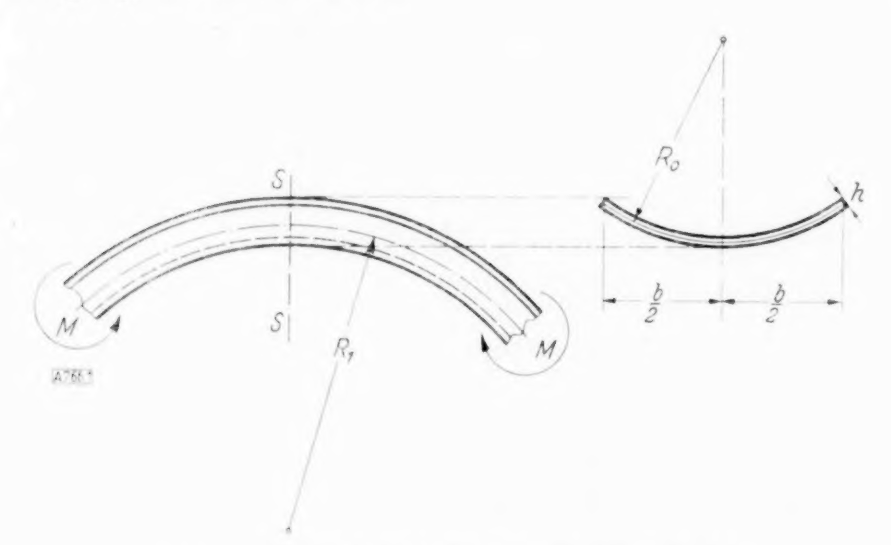


Abb. 1. Doppelt gekrümmter Plattenstreifen.

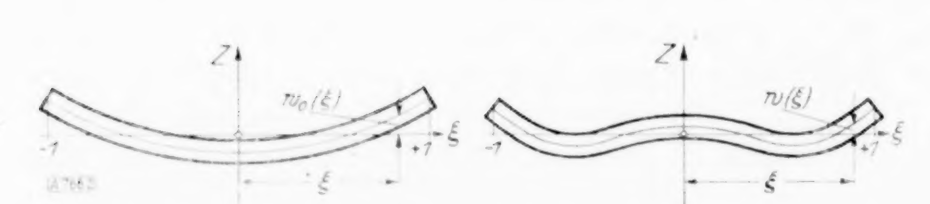
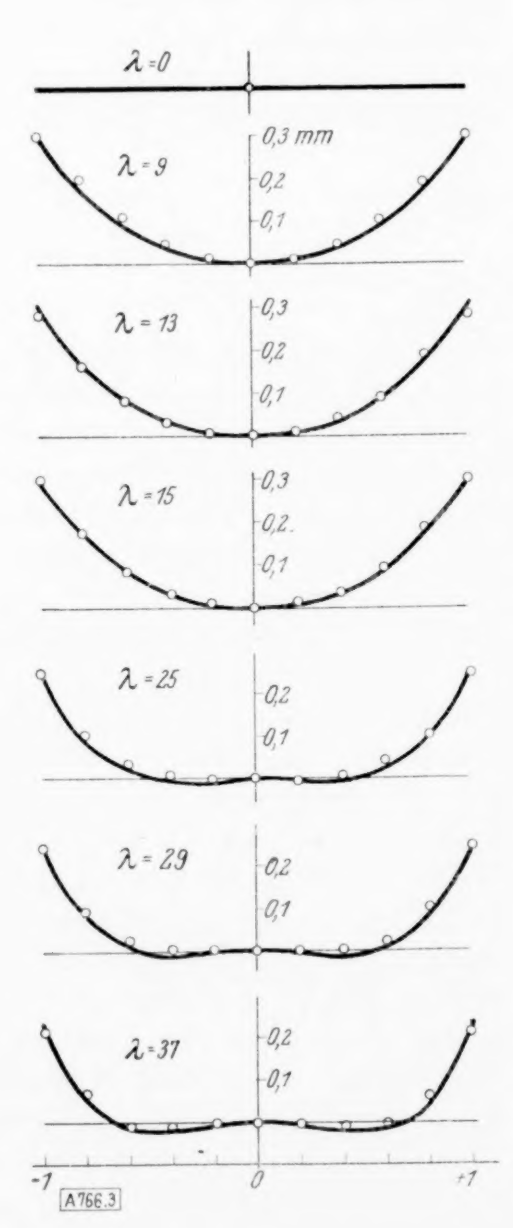


Abb. 2. Plattenquerschnitt vor und nach der Verformung.



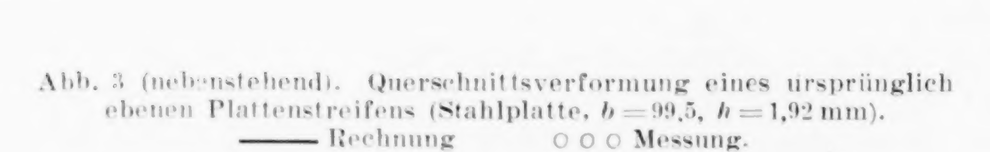


Abb. 3 (nebenstehend). Querschnittsverformung eines ursprünglich ebenen Plattenstreifens (Stahlplatte, $b = 99{,}5$, $h = 1{,}92$ mm). ——— Rechnung ○ ○ ○ Messung.

[1]) Mechanical Engineering, Vol. 45, No. 4 (1923), S. 259.

Deformation und Spannungszustand. Wir betrachten (Abb. 2) einen Plattenquerschnitt vor und nach der Verformung und legen in den Schwerpunkt des unverformten Querschnitts den Ursprung eines Koordinatensystems. Die unverformte kreisbogenförmige Querschnittsmittellinie hat dann die Koordinaten

$$w_0(\xi) = \frac{b^2}{8 R_0} [\xi^2 - 1/3] + \cdots,$$

wobei im Sinne der eingangs getroffenen Festsetzungen die weiteren Glieder außer Betracht bleiben.

Durch den Schwerpunkt des deformierten Querschnitts wird gleichfalls ein Koordinatensystem gelegt, bezüglich dessen die verformte Querschnittsmittellinie durch die Ortsfunktion

$$w = w(\xi)$$

gegeben sein möge.

Der Verzerrungszustand der Platte wird in der üblichen Weise gekennzeichnet durch die Dehnungsmittelwerte $e_{\xi\xi}$, $e_{\varphi\varphi}$, $e_{\xi\varphi}$, und die Krümmungsänderungen $k_{\xi\xi}$, $k_{\varphi\varphi}$, $k_{\xi\varphi}$ der Plattenmittelfläche. Bei reiner Biegung ist dabei

$$e_{\xi\varphi} = k_{\xi\varphi} = 0 .$$

Für die Komponente $e_{\varphi\varphi}$ ergibt sich — wiederum unter Beachtung der eingangs getroffenen Festsetzungen über die Plattenabmessungen — der folgende Ausdruck

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{w(\xi)}{R} - \frac{w_0(\xi)}{R_1} .$$

Darin bedeutet R den mittleren Krümmungsradius der Platte nach der Verformung und somit

$$k = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$$

die „mittlere Krümmungsänderung".

Die für die örtlichen Krümmungsänderungen maßgebenden Ausdrücke $k_{\xi\xi}$ und $k_{\varphi\varphi}$ haben die Gestalt

$$k_{\xi\xi} = -\frac{4}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R_0}(1 + e_{\xi\xi}), \qquad k_{\varphi\varphi} = k\left(1 - \frac{w_0(\xi)}{R_1}\right) - \frac{1}{R_1} e_{\varphi\varphi} .$$

Der Formänderungszustand der Platte ist bis auf die noch ausstehende Komponente $e_{\xi\xi}$ durch die Koordinaten $w(\xi)$ der deformierten Querschnittsmittellinie dargestellt. Die Form der Funktion $w(\xi)$ ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit dem Hookeschen Gesetz. —

Die in der Platte wirkenden Spannungen werden wie üblich zu den Schnittkräften $S_\xi, S_\varphi, T_{\xi\varphi}$; $T_{z\xi}, T_{z\varphi}$ und den Schnittmomenten $M_\xi, M_\varphi, D_{\xi\varphi}$ zusammengefaßt.

Im vorliegenden Falle verschwinden $T_{\xi\varphi}$, $T_{z\varphi}$ und $D_{\xi\varphi}$. Zwischen den übrigbleibenden Spannungsgrößen und den Deformationen bestehen unter Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
S_\xi &= D\left(e_{\xi\xi} + \frac{1}{m} e_{\varphi\varphi}\right); & D &= h\, E \frac{m^2}{m^2 - 1} \\
S_\varphi &= D\left(e_{\varphi\varphi} + \frac{1}{m} e_{\xi\xi}\right) & &\text{„Dehnungssteifigkeit"} \\
M_\xi &= B\left(k_{\xi\xi} + \frac{1}{m} K_{\varphi\varphi}\right) & B &= \frac{h^3 E m^2}{12(m^2 - 1)} \\
M_\varphi &= B\left(k_{\varphi\varphi} + \frac{1}{m} k_{\xi\xi}\right) & &\text{„Biegungssteifigkeit"}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für ein Element der verformten Platte lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} = 0, \\
&\frac{\partial T_{z\xi}}{\partial \xi} - \left(\frac{b}{2}\right) K_{\varphi\varphi}\, S_\varphi + \left(\frac{b}{2}\right) K_{\xi\xi}\, S_\xi = 0 \\
&\frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + T_{z\xi} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen:

$$S_\xi = 0\,; \qquad T_{\xi\xi} = 0\,; \qquad M_\xi = 0 \quad \text{für} \quad \xi = \pm 1\,.$$

Aus der ersten Gl. (2) folgt, daß S_ξ überhaupt verschwindet; mit $S_\xi = 0$ ergibt sich dann aus der ersten Gl. (1) die noch ausstehende Deformationskomponente $e_{\xi\xi} = -\frac{1}{m} e_{\varphi\varphi}$.

Setzt man zur Abkürzung noch

$$\left(\frac{w(\xi)}{R} - \frac{w(\xi)}{R_1}\right) = \frac{b^2 K}{4R}\,\zeta(\xi)\,,$$

so liefern die beiden letzten Gl. (2) für ζ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 \zeta}{d\xi^4} + \frac{b^2}{4mR}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + 4\lambda^2 \zeta = 0\,; \qquad \lambda = \sqrt{3\,\frac{m^2-1}{m^2}}\left(\frac{b^2}{hR}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

mit den Randbedingungen:

$$\left[\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \frac{b^2}{4mR}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\zeta\right]_{\pm 1} = \frac{1}{m} + \frac{R}{R_0}, \qquad \left[\frac{d^3\zeta}{d\xi^3} + \frac{b^2}{4mR}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\frac{d\zeta}{d\xi}\right]_{\pm 1} = -\frac{b^2}{4mR_0R_1} \quad (4).$$

Die Lösung der Gl. (3) lautet:

$$\zeta(\xi) = A \cosh \alpha_1 \xi \cos \alpha_2 \xi + B \sinh \alpha_1 \xi \sin \alpha_2 \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Koeffizienten A und B ergeben sich aus den Randbedingungen, die Zahlen α_1, α_2 aus der zu (3) gehörigen charakteristischen Gleichung.

Aus der Gestalt von (5) erkennt man, daß sich die Querschnittsmittellinie mit wachsender Belastung mehr und mehr verflacht und zugleich wellenförmig verformt: die Ausbildung der Wellen ist um so ausgeprägter, je breiter die Platte ist und je stärker sie gebogen wird. Diese Wellenbildung ist natürlich auch im Spezialfall der ursprünglich ebenen Platte vorhanden und kann dort leicht beobachtet werden. Quantitative Messungen[2]) zeigen gute Übereinstimmung mit der Rechnung (Abb. 3).

Zusammenhang zwischen Biegungsmoment und mittlerer Krümmungsänderung. Das im Plattenquerschnitt wirksame Biegungsmoment M berechnet sich aus

$$M = b\int_0^1 M_\xi \, d\xi + b\int_0^1 S_\varphi \cdot w(\xi)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Zur Auswertung führt man zweckmäßig folgende dimensionslose Größen ein:

$$\mu = \sqrt{3\,\frac{m^2-1}{m^2}}\left(\frac{Mb}{hB}\right), \quad \lambda = \sqrt{3\,\frac{m^2-1}{m^2}}\left(\frac{b^2}{hR}\right), \quad \lambda_0 = \sqrt{3\,\frac{m^2-1}{m^2}}\left(\frac{b^2}{hR_0}\right), \quad \lambda_1 = \sqrt{3\,\frac{m^2-1}{m^2}}\left(\frac{b^2}{hR_1}\right).$$

Die Ausrechnung von (6) führt dann zu folgender Darstellung:

$$\mu = (\lambda - \lambda_1)\left[1 - \frac{1}{m^2}\,\Phi_0(\lambda) + \frac{\lambda_0}{m}\,\Phi_1(\lambda) + \lambda_0^2\,\Phi_2(\lambda) + -\frac{\lambda_1}{m^2}\,\Psi_0(\lambda) + \frac{\lambda_1\lambda_0}{m}\,\Psi_1(\lambda) + \lambda_1\lambda_0^2\,\Psi_2(\lambda)\right] \quad (7).$$

Hierin hängen die Zahlen $\Phi_{0,1,2}$, $\Psi_{0,1,2}$ nur von λ allein ab und haben die Gestalt:

$$\Phi_0(\lambda) = \left[\frac{3}{2}\,\Phi(\lambda) + \Psi(\lambda)\right]; \qquad \Psi_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\,\Phi(\lambda) - \Psi(\lambda)\right];$$

$$\Phi_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \Phi(\lambda) - 2\,\Psi(\lambda)\right]; \qquad \Psi_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left[1 - 3\,\Phi(\lambda) + 2\,\Psi(\lambda)\right];$$

$$\Phi_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{2}\,\Phi(\lambda) - \Psi(\lambda)\right]; \qquad \Psi_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^3}\left[1 - \frac{5}{2}\,\Phi(\lambda) + \Psi(\lambda)\right];$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\mathrm{Cof}\sqrt{\lambda} - \cos\sqrt{\lambda}}{\mathrm{Sin}\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}}\,; \qquad \Psi(\lambda) = \frac{\mathrm{Sin}\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}}{(\mathrm{Sin}\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda})^2}.$$

[2]) Die Messungen wurden auf Veranlassung von Prof. Bauersfeld von Herrn cand. H. Zöllner im Zusammenhang mit seiner Dr.-Arbeit ausgeführt. Die Meßeinrichtungen wurden von der Firma Zeiß zur Verfügung gestellt.

In Abb. (4, 5) sind die Funktionen $\Phi_0\,\Phi_1\,\Phi_2$, $\Psi_0\,\Psi_1\,\Psi_2$ in geeigneter Überhöhung aufgetragen.

Die Diskussion von Gl. (7) lehrt, daß der Zusammenhang zwischen Moment und Krümmungsänderung nicht linear und auch nicht symmetrisch ist. Der Streifen zeigt also positiven und negativen Momenten gegenüber ein anderes Verhalten. Des weiteren ist festzustellen, daß von gewissen Werten des Parameters λ_0 an der Zusammenhang auch nicht mehr monoton ist, so daß Stellen mit $\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 0$ auftreten. Solche Stellen bedeuten aber für den Belastungszustand kritische Punkte; bei Überschreiten der kritischen Belastung findet Zusammenbruch oder Übergang in eine neue Gleichgewichtslage statt[3]). In Abb. 6 ist für den zylindrischen Streifen ($\lambda_1 = 0$) der Zusammenhang quantitativ aufgetragen. Die elementare Theorie würde nur die Tangenten im Nullpunkt liefern. Der jenseits der kritischen Stellen gezeichnete Funktionsverlauf ist natürlich mechanisch nicht reell. 766

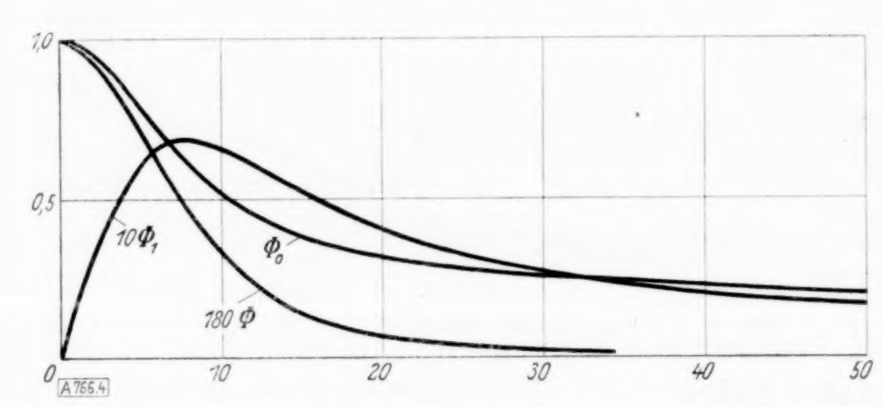


Abb. 4. Die Beiwerte Φ_0, Φ_1, Φ_2 und Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 in Abhängigkeit vom Parameter λ.

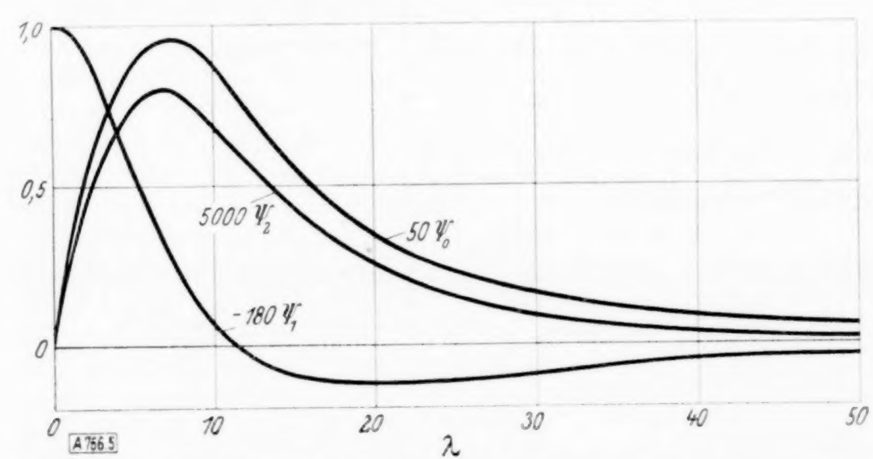


Abb. 5. Zusammenhang zwischen dem wirksamen Biegungsmoment und der mittleren Krümmungsänderung für einen Zylinderstreifen (Meßband).

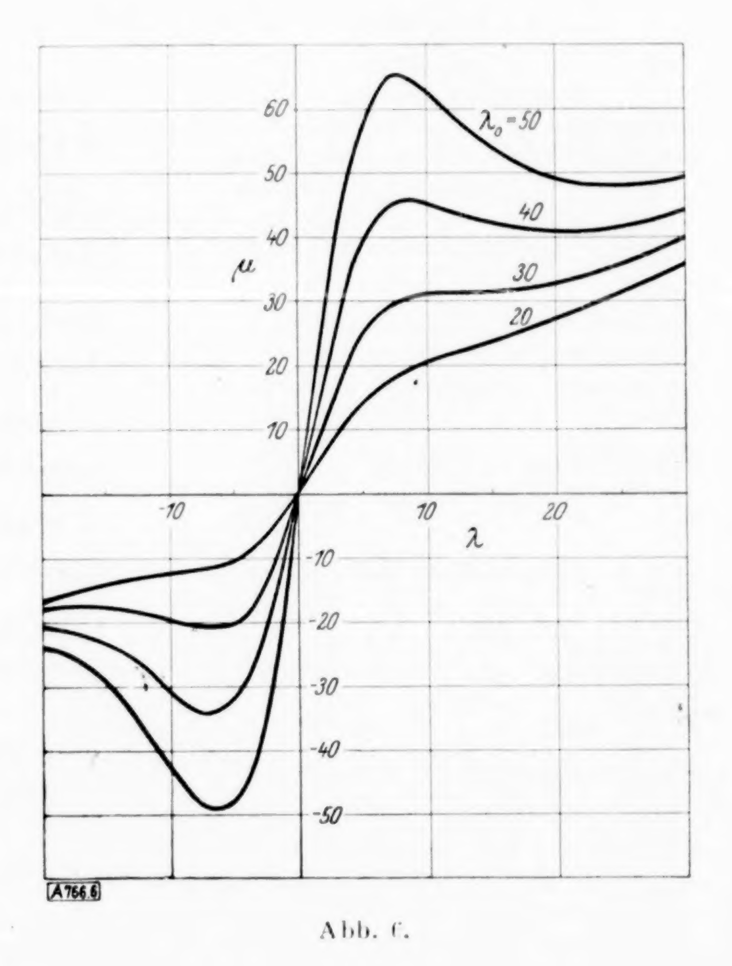


Abb. 6.

Rechenpapiere zum Integrieren durch Auszählen.

Von *F. Weinig* in Berlin-Adlershof.

Ebenso wie man die Größe von Flächen $F = \oint d\,y\,d\,x$ dadurch berechnen kann, daß man sie auf Millimeterpapier aufzeichnet und die innerhalb gelegenen durch das Millimeterpapier gegebenen kleinen Quadrate auszählt, kann man auch andere Integrale der Form

$$J = \oint f(x)\,g(y)\,d\,y\,d\,x$$

durch Auszählen bestimmen, wenn man ein dazu geeignetes Rechenpapier benutzt. Längs der x-Achse bzw. y-Achse sind diese Papiere so einzuteilen, daß in jedem Intervall $F(x) = \int f(x)\,d\,x$ um ΔF bzw. $G(y) = \int g(y)\,d\,y$ um ΔG zunimmt. Die aus den entstehenden Rechtecken sich ergebenden Beiträge zum Integral sind dann $\Delta J = \Delta F \cdot \Delta G$ und ihre gesamte Anzahl liefert mit ΔJ multipliziert das gesuchte Integral. Solche Rechenpapiere sind für eine Anzahl von Integralen insbesondere der Aerodynamik entworfen worden. Es ist zu hoffen, daß durch sie die betreffenden Integrationen so vereinfacht werden, daß man mit ihrer Durchführung auch ungeübte Hilfskräfte betrauen kann.

[3]) Die gleiche Erscheinung hat Brazier am gebogenen dünnwandigen Rohr festgestellt. Vgl. Brazier, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 116 (1927).

Bisher ließ ich Rechenpapier anfertigen bzw. vorbereiten für folgende Integrale:

I. Bestimmung von Momenten:

1. $\iint d\,y\,d\,x^2$	(statisches Moment),
2. $\iint d\,y\,d\,x^3$	(axiales Trägheitsmoment),
3. $\iint d\,y^2\,d\,x^2$	(Kreiselmoment).

II. Bestimmung von Fourierkoeffizienten:

1.—6. $\int y\,d\,{}^{\sin}_{\cos}\,n\,x$	$(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

III. Bestimmung von Vektorintegralen.

A. Aufpunkte auf der Belegungslinie:

1. $\int \mu\,d \ln x$	(Stromfunktion bei gegebenem Potential μ)	ebene Störung, geradlinige Belegung,
2. $\int \mu\,d\,\frac{1}{x}$	(Normalkomponente bei gegebenem Potential μ)	
3. $\int \mu\,d\,\frac{1}{x^2}$	(Potential bei gegebener Quellbelegung μ auf Achse) (Vorstrom auf Achse bei gegebener Quellbelegung μ auf Achse) (Potential bei gegebener Doppelquellbelegung μ)	achsensymmetrische Strömung,
4. $\int \mu\,d\,\frac{1}{x^3}$	(Vorstrom auf Achse bei gegebener Doppelquellbelegung μ)	
5. $\int \mu\,d \ln \sin \frac{\alpha}{2}$	(Stromfunktion bei gegebenem Potential μ)	ebene Strömung, kreislinige Belegung.

B. Aufpunkte außerhalb der Belegungslinie:

6. $\int \mu\,d \ln \sqrt{x^2 + y^2}$	(Stromfunktion außerhalb bei auf Gerader gegebenem Potential μ)	ebene Strömung, geradlinige Belegung,
7. $\int \mu\,d \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	(Potential außerhalb bei auf Gerader gegebenem Potential μ)	
8. $\int \mu\,d\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	(Potential außerhalb bei auf Achse gegebener Stromfunktion)	achsensymmetrische Strömung,
9. $\int \mu\,d\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	(Stromfunktion außerhalb bei auf Achse gegebener Stromfunktion)	
10.—12. $\int \mu\,d \ln \sqrt{1 + (1 + a)^2 - 2(1 + a)\cos \alpha}$	(Stromfunktion außerhalb bei längs Kreis gegebenem Potential) (3 verschiedene a)	ebene Strömung, kreislinige Belegung.
13.—15. $\int \mu\,d \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{1 + a - \cos \alpha}$	(Potential außerhalb bei längs Kreis gegebenem Potential) (3 verschiedene a)	

IV. Verwindungseinfluß:

1. $\int \nu\,d\,(\sin x\,Ci\,x - \cos x\,si\,x)$	(Abwind bzw. Zirkulation bei gegebener Verwindung).

BUCHBESPRECHUNGEN

Aerodynamic Theory. A General Review of Progress. Under a Grant of the Guggenheim Fund for the Promotion of Aeronautics hrsg. v. W. F. DURAND, Vol. IV, A. Betz, Applied Airfoil Theory, C. Wieselsberger, Airplane Body (Non-Lifting System) Drag and Influence on Lifting System, H. Glauert, Airplane Propellers, C. Koning, Influence of the Propeller on other Parts of the Airplane Structure. XVI + 434 S., 321 Abb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis geb. 34 M.

Das Durandsche Handbuch, dessen IV. Band hier besprochen werden soll, gibt eine von berufenen Fachleuten in einzelnen Beiträgen geschriebene Zusammenfassung der bisher gewonnenen Ergebnisse der aerodynamischen Forschung.

Mit Rücksicht darauf, daß viele wichtige Fragen, die in den Anwendungen der Aerodynamik auf Flugzeuge auftreten, der mathematischen Behandlung nur schwer oder noch gar nicht zugänglich sind, räumt der vorliegende Band den Versuchsergebnissen einen breiten Raum ein.

Im ersten Beitrag — Angewandte Tragflügeltheorie von A. Betz — werden zunächst die allgemeinen Eigenschaften des Tragflügels beschrieben (Polaren) und deren Beeinflussung durch zweckmäßige Maßnahmen (Vergrößerung des maximalen Auftriebs, Beeinflussung der Druckverteilung längs des Profils durch geeignete Formgebung) erörtert. Die Eigenschaften verschiedener Profilformen werden an Hand der Theorie und des vorliegenden Versuchsmaterials dargelegt. Es folgt die Betrachtung des einzelnen Flügels endlicher Spannweite (Einfluß von Seitenverhältnis, Umrißform, Spalten, Ausschnitten usw.) sowie die Untersuchung von Flügelkombinationen (Tragflügel und Leitwerk, Doppeldecker) in bezug auf Stabilitätsverhältnisse, gegenseitige Beeinflussung und ähnliches. Das letzte Kapitel befaßt sich schließlich mit dem Flugzeug als Ganzes im Hinblick auf unsymmetrische und nichtstationäre Bewegungen (Schieben, Drehungen um die drei Flugzeugachsen, Autorotation und Trudeln).

Ein kürzerer Beitrag von C. Wieselsberger hat den Widerstand der nicht auftriebliefernden Flugzeugteile und deren Einfluß auf die Tragflügeleigenschaften zum Thema. Der Praktiker, der diese Dinge beim Entwurf zu berücksichtigen hat, findet hier eine Übersicht über vorhandenes Versuchsmaterial und Hinweise auf die wichtigeren Originalarbeiten. Der Einfluß des Rumpfes auf die Auftriebsverteilung wird theoretischen Betrachtungen unterzogen.

Der dritte Beitrag von H. Glauert, Flugzeugpropeller, stellt die letzte Arbeit des leider viel zu früh verstorbenen Verfassers dar. In seiner Übersichtlichkeit und Klarheit der Darstellung bildet dieser Abschnitt eine sehr gute Einführung in den gesamten Problemkreis der Luftschraubentheorie. Der fortschreitenden Entwicklung der Propellertheorie folgend werden nach allgemeinen Vorbemerkungen die einfache Schraubentheorie, ihre Erweiterung durch Berücksichtigung der Strahldrehung, der Einfluß der Luftreibung, die Blattelemententheorie und schließlich die Wirbeltheorie der Luftschraube dargestellt. Im Anschluß an letztere werden die Propeller geringsten Energieverlustes einer Betrachtung unterzogen. Ein eigenes Kapitel ist dem Einfluß von Flugzeugrumpf und Flügel auf das Verhalten des Propellers gewidmet, was vor allem der Konstrukteur begrüßen wird, der den Wechselbeziehungen zwischen Flugzeug und Schraube Rechnung zu tragen hat. Nach einer Betrachtung der experimentellen Methoden der Propelleruntersuchung unter Berücksichtigung der Einflüsse von Windkanal, Modellmaßstab und Kompressibilität der Luft werden schließlich noch die besonderen Verhältnisse bei Hubschrauben, Windmühlen und Ventilatoren sowie verschiedene Sonderfragen behandelt.

Im letzten Beitrag des Bandes stellt C. Koning den Einfluß des Propellers auf andere Flugzeugteile dar. Es wird eine ausführliche Theorie der Beeinflussung des Tragflügels gegeben. Da — durch die mathematischen Schwierigkeiten des Problems gezwungen — ein stark vereinfachtes Bild der Propellerströmung zugrunde gelegt werden muß, zeigen die Ergebnisse der mit den Mitteln der Potentialtheorie durchgeführten Rechnung zahlenmäßig z. T. größere Abweichungen von den gemessenen Werten. Qualitativ gibt die Theorie allerdings einen brauchbaren Einblick in das Wesen der Vorgänge. Die infolge der vereinfachenden Annahme durch die Theorie nicht erfaßten Einwirkungen auf den Flügel (z. B. Veränderung der Abreißvorgänge), sowie die Wirkung auf die übrigen Flugzeugteile werden einer kürzeren Sonderbetrachtung unterzogen.

Der neue Band des Durandschen Handbuches reiht sich würdig in die Reihe der übrigen Bände dieses Standardwerkes der heutigen aerodynamischen Forschung ein.

Göttingen. O. Walchner. 780

Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 30 Settembre — 6. Ottobre 1935 — XIII. Tema: Le Alte Velocita in Aviazione (Reale Accademia d'Italia, Fondanzione Alessandro Volta, Istituta della Società Edison de Milano, Atti dei Convegni, Bd. 5). 694 S. Rom 1936. XIV, Reale Accademia d'Italia. Preis 50 Lire.

Die Königliche Akademie von Italien veranstaltete im Jahr 1935 unter Leitung des bekannten Aerodynamikers General G. A. Crocco ihre 5. Volta-Tagung, die dem Fluge bei hohen Geschwindigkeiten gewidmet war. Die Kongreßleitung hatte Fachleute von internationalem Ruf zu Berichten aufgefordert deren Themen sie gestellt hatte. Diese Berichte liegen mitsamt den wertvollen Diskussionen jetzt in einem stattlichen Band gedruckt vor.

Der erste Abschnitt des Kongresses hatte die Erfahrungen bei hohen Fluggeschwindigkeiten zum Gegenstand, die bei dem Wettbewerb um den Schneiderpokal gemacht worden waren. Englische und italienische Fachleute berichteten über die benutzten Flugzeuge, die Flugmotoren und schließlich über das Training der Piloten. Im zweiten Abschnitt der Tagung wurde über die einschlägigen aerodynamischen Probleme verhandelt. L. Prandtl gab eine Einführung in die Theorie der kompressiblen Gasströmungen (auch in dieser Zeitschrift Bd. 16, S. 129, 1936 abgedruckt), während G. I. Taylor über einige geschlossene Lösungen („Well established problems") solcher Strömungsaufgaben berichtete. Th. v. Kármán sprach über den Widerstand in kompressiblen Strömungen, E. Pistolesi und A. Busemann über den Auftrieb im Unter- und Überschallgebiet. Schließlich folgten 6 Vorträge über Meßergebnisse und über die experimentelle Technik in Windkanälen für hohe Geschwindigkeiten. Der 3. und letzte Abschnitt der Tagung stand unter der Überschrift „Thermodynamik" und beschäftigte sich mit dem Stratosphärenflug, mit Motoren, die für große Höhen geeignet sind, und auch mit der Möglichkeit eines Vortriebs durch den Rückstoß von Gasstrahlen.

Diese kurze, notwendig unvollständige Übersicht zeigt, daß der Kongreß eine eindrucksvolle Zusammenfassung unserer gegenwärtigen Kenntnisse auf einer Reihe wichtiger Gebiete gebracht hat, die für Technik und Naturwissenschaft interessant sind. Jeder, der auf diesen Gebieten weiterarbeiten will, wird sich zuerst mit den in diesem Bande niedergelegten Erkenntnissen auseinandersetzen müssen.

Göttingen. W. Tollmien. 760

BORIS A. **BAKHMETEFF,** Professor Columbia University, The Mechanics of Turbulent Flow. Lectures. XII + 101 S. Princeton 1936, Princeton University Press. Preis 16 sh.

Diese Vorlesungen wollen in die modernen Auffassungen der turbulenten Strömungen durch Kreisrohre einführen. Es handelt sich also um Gedankengänge von L. Prandtl und Th. v. Kármán, die durch die Stichworte „Mischungsweg" und „logarithmisches Widerstandsgesetz" gekennzeichnet werden können.

Der Titel des Buches ist freilich nicht ganz angemessen, da man in einer Mechanik der Turbulenz ja nicht bloß den turbulenten Rohrreibungswiderstand und was unmittelbar dazu gehört, behandelt zu finden erwartet. Auch Dinge, die sich ohne größere Mühe hätten anschließen lassen, finden sich kaum erwähnt, wie etwa das Widerstandsgesetz ebener Platten oder der turbulente Austausch anderer Eigenschaften als des Impulses z. B. staubförmiger Beimengungen oder der Wärme. Es ist natürlich das gute Recht des Verfassers, auf die bislang erfolglosen Ansätze zur Erfassung der Turbulenz mit den Mitteln der statistischen Mechanik im allgemeinen überhaupt nicht einzugehen. Sehr bedenklich ist es aber, wenn als einzige dieser statistischen Arbeiten ausgerechnet diejenige herangezogen wird (vgl. Fig. 49 und zugehörigen Text), die nachgewiesenermaßen Verstöße gegen Grundgesetze der Hydrodynamik enthält.

Der Verfasser erreicht im übrigen durchaus sein Ziel, in klarer und anschaulicher Weise die heute angenommenen Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Impulsübertragung und des Rohrreibungswiderstandes bei glatter und rauher Wandung dem Leser nahezubringen, ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen. Die Darstellung wird durch eine große Anzahl lehrreicher Figuren unterstützt.

Göttingen. W. Tollmien. 760

ADAM THADDÄUS **TROSKOLANSKI,** Dipl.-Ing., Hilfsbuch für Wassermesserprüfende, Bd. II, 2 Verbundwassermesser. Warschau 1936, Reichsamt für Maß. Verlagsnummer 53.

Nach dem beigegebenen deutschen Inhaltsverzeichnis behandelt das in polnischer Sprache geschriebene Buch in neun Abschnitten: Allgemeines über Verbundwassermesser. Elementartheorie der selbsttätigen Ventile. Umschaltventile. Flügelrad-Verbundwassermesser. Flügelrad - Zwillingswassermesser. Woltman-Verbundwassermesser. Schreibgeräte und Fernmeßvorrichtungen für Verbundwassermesser. Bedingung der rationellen Anwendung von Verbundwassermessern. Historische Entwicklung von Verbundwassermessern. Wiliers.

L. N. G. **FILON,** C. B. E., M. A., D. Sc., F. R. S., Professor of Applied Mathematics of University College, London. A Manual of Photo-Elasticity for Engineers. XI + 140 S. Cambridge 1936, University Press. Preis geb. 5 sh.

Neben dem großen Werk über Spannungsoptik „Treatise on Photo-Elasticity" von Coker und Filon, das mehr als Nachschlagewerk für Forscher dient, hat Filon als Einführung in die Spannungsoptik das vorliegende handliche Buch herausgegeben, das vor allen Dingen für den Ingenieur bestimmt ist und ihm die notwendigen Grundlagen für spannungsoptische Versuche vermitteln soll. Es werden ausführlich die optischen Grundlagen der ebenen Spannungsoptik behandelt. Wichtig sind insbesondere die Besprechung der optischen Einrichtungen sowie die Angaben über die Bestimmung der optischen Konstanten der verschiedenen Werkstoffe, wie Glas und Kunstharze, für die Modelle. Die Kapitelüberschriften lauten: Polarisiertes Licht; Gleichmäßiger Spannungszustand; Optische Untersuchung bei ungleichförmigen Spannungen; Das Modell; Das Polariskop und das optische System; Unabhängige Messung der Spannungssumme.

Das Buch kann als wertvoller Wegweiser für die Durchführung spannungsoptischer Versuche empfohlen werden, zumal es sich durch eine hervorragend klare Darstellung auszeichnet.

München. L. Föppl. 703

Dr.-Ing. O. **FÖPPL,** Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig, Aufschaukelung und Dämpfung von Schwingungen. Grundzüge der Technischen Schwingungslehre. Bd. II. VI + 121 S. mit 72 Abb. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 8,40 M.

Das Buch ist eine Erweiterung und teilweise Fortsetzung gewisser Kapitel der „Grundzüge der technischen Schwingungslehre", deren zweite Auflage im Jahre 1931 erschienen ist. Der Verf. bespricht nach einer kurzgefaßten theoretischen Erörterung des Schwingungsvorganges und der Schwingungsgleichungen die Ursachen und Gesetze der Dämpfung und behandelt dann im zweiten Abschnitt eingehend mehrere einschlägige und lehrreiche Beispiele aus der Praxis des Maschineningenieurs. An einer Viertakt-Dieselmaschine wird gezeigt, auf welche Weise man durch Veränderung der Abmessungen der schwingenden Teile und durch Auswahl des geeigneten Werkstoffes die Eigenfrequenz weitgehend ändern und die Schwingungsform der Anordnung (Lage der Knoten usw.) im günstigen Sinne beeinflussen kann. Anschließend wird im dritten Abschnitt die Aufschaukelung von Seilschwingungen durch Wirbelablösung besprochen. Der vierte und fünfte Abschnitt beschäftigt sich mit den verschiedenen Möglichkeiten der Dämpfung (Dämpfer ohne und mit Reibung, ohne und mit Resonanz). Der Verfasser beschreibt einige Seilschwingungsdämpfer und ihre Wirkungsweise, sowie die Maßnahmen, mittels deren durch elastische Lagerung die Schwingungsübertragung und Energiestreuung teilweise verhindert werden können. Der abschließende sechste Abschnitt bezieht sich auf praktisch wichtige Fälle der Aufschaukelung von Schwingungen (Schaukel-, Glockenschwingung) durch Kreiselwirkung und die Dämpfung von Schiffsschlingerbewegungen durch den Schlickschen Schiffskreisel und den Frahmschen Schlingertank.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß es dem Verfasser gelungen ist, für den heranwachsenden Ingenieur eine lehrreiche Einführung in das verhältnismäßig neue Gebiet der Schwingungslehre zu geben, ohne sich von der praktischen Fragestellung durch theoretische Entwicklung ablenken zu lassen. Der theoretische Interessierte mag hier und da eine schärfere Fassung einiger Grundbegriffe für wünschenswert halten. Im ganzen wird der Wert des Föpplschen Buches durch solche leicht behebbare Mängel formaler Art kaum eine Einbuße erleiden.

Aachen. Wilhelm Müller. 720

REINHOLD **FÜRTH,** Prof. an der Deutschen Universität Prag, Einführung in die Theoretische Physik. XIV + 483 S. mit 128 Abb. Wien 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 19,80 M.

Es ist oft beklagt worden, daß in der neueren Entwicklung der Physik Experiment und Theorie sich zu zwei getrennten „Forschungsgebieten" entwickelt haben und daß der Experimentator zwar weiß, wie man das Experiment macht, aber nicht, was es bedeutet, der Theoretiker umgekehrt nicht weiß, wie es gemacht wird, aber wohl, was es bedeutet. Diese Erscheinung mag zum Teil durch die wachsende Menge des Stoffes bedingt sein, die eine Spezialisierung mit sich bringt. Wesentlicher ist wohl, daß immer nach dem Entstehen umfassender Theorien und neuer Begriffe einige Zeit vergeht, bis man gelernt hat, die Experimente in den neuen Begriffen zu denken. Dann ist es besonders wichtig, Darstellungen der Physik zu besitzen, die auf die ständigen Wechselbeziehungen zwischen Experiment und Theorie Nachdruck legen. Der Verfasser hat es unternommen, ein Lehrbuch zu schreiben, dessen erster Teil die Theorie, dessen zweiter die Experimente enthält und wobei eine fortwährende enge Verbindung beider Teile bestehen soll. Der erste Teil, die theoretische Physik, liegt vor, der zweite soll in kurzer Zeit folgen. Nach einer kurzen Einführung in Aufgaben und Methoden der theoretischen Physik bringen die Kap. 2 bis 6 zunächst mathematische Entwicklungen; klar und anschaulich werden unter anderem Vektoren und Tensoren, Matrizen, Felder und Potentiale, Wellen, Statistik in einer auf den späteren Gebrauch zugeschnittenen Form besprochen. Dann beginnt mit der Mechanik die eigentliche Physik. Hierbei schließt sich an die klassische Mechanik der Massenpunkte, starren und elastischen Körper, Gase und Flüssigkeiten an ihrem natürlichen Platz die Quantenmechanik in der wellenmechanischen Form. Nun folgen Thermodynamik, statistische Mechanik und kinetische Theorie der Materie, die zum Teil ziemlich ausführlich behandelt werden. In der Elektrodynamik werden in üblicher Weise zuerst Magneto- und Elektrostatik und stationäre, dann nichtstationäre Vorgänge und Optik besprochen; hier findet sich auch kurz die Theorie der optischen Abbildung. Die elektromagnetische Theorie bewegter Elektronen führt dann zur Relativitätstheorie. Die beiden vorletzten Kapitel bringen diejenigen elektromagnetischen Erscheinungen, bei denen statistische Fragen eine Rolle spielen: Elektronentheorie der Metalle, Elektrolyte, Gasentladung, Magnetismus, die elektrische Erscheinungen. Das letzte Kapitel enthält die Theorie der Strahlung und der Spektren. Die schwierige Aufgabe, die ganze theoretische Physik in einem Band von nicht einmal 500 Seiten darzustellen, ist vom Verfasser ausgezeichnet gelöst worden. Dabei ist wohl die Notwendigkeit, stets die Verbindung mit dem zugehörigen Lehrbuch der Experimentalphysik zu erhalten, der Anschaulichkeit und Verständlichkeit sehr zustatten gekommen.

Theodor Schmidt. 726

E. **MADELUNG,** o. Prof. d. Theoret. Physik a. d. Univ. Frankfurt a. M., Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. IV). XIII + 381 S. m. 25 Textfig. 3., verbess. und verm. Aufl. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 28,80 M.

Zehn Jahre nach Erscheinen der zweiten Auflage kommt jetzt die dritte dieses bewährten Nachschlagwerkes heraus, das für den Physiker die zur Durchführung rechnerischer Untersuchungen erforderlichen mathematischen Definitionen und Formeln bereitstellt. Diese neue Auflage ist mit Unterstützung der Herren Boehle und Flügge vom Verfasser einer eingehenden Überarbeitung unterzogen worden, einer Überarbeitung, die zwar den Charakter des Buches nicht ändert, die aber einmal manches, gegen das berechtigte Einwände erhoben wurden, richtigstellt und die andererseits wesentliche Erweiterungen bringt entsprechend der Zunahme des mathematischen Apparates, den heute der Physiker braucht. So sind im mathematischen Teil die Abschnitte über die Entwicklung beliebiger Funktionen nach Systemen bekannter Funktionen, über orthogonale Funktionssysteme, über Algebra, Integralgleichungen, Variationsrechnung erweitert, ein Abschnitt über Gruppentheorie hinzugefügt, im physikalischen Teil eine kurze Darstellung der neueren Quantenmechanik gegeben. Durch die Bearbeitung ist der Umfang, aber noch mehr die Brauchbarkeit des Buches erhöht worden, denn die Veränderungen kann man durchgehend als Verbesserungen bezeichnen. Willers. 704

M. **VON LAUE** und R. **VON MISES,** Stereoskopbilder von Kristallgittern. Teil II. 56 S. mit 24 Tafeln. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis in Mappe 18 M.

Der im Jahre 1926 erschienenen ersten Sammlung von Stereoskopbildern, die einfachere Translationsgitter enthielt und eine anschauliche Einführung in die Lehre von den Kristallgittern gab, folgt jetzt eine zweite Reihe von 24 wesentlich komplizierteren Gittern, deren Auswahl von Frau Rehbock-Verständig und Herrn Menzer getroffen wurde. Neben einigen Elementen: dem Arsen und Selen (beide rhomboedrisch), dem Graphit (hexagonal) und dem β-Wolfram (kubisch) findet man die Strukturen von Verbindungen von zwei und drei Atomarten. Es sind vertreten das einfache sowie das raum- und das flächenzentrierte kubische Gitter, ferner das hexagonale, das einfache und das raumzentrierte tetragonale, das rhomboedrische und das einfache sowie das basiszentrierte rhombische Gitter. Die Zeichnungen sind mit größter Präzision angefertigt; die Struktur kommt bei der stereoskopischen Betrachtung mit oft geradezu verblüffender Plastik heraus; selbst bei komplizierteren Gebilden wie etwa beim Eisenkies oder beim Kaliumtetrachloroplatinat gewinnt man einen guten Einblick in die atomare Anordnung. Wertvolle Dienste bei der Betrachtung leistet der reichhaltige, knapp und klar gehaltene Text (in deutscher und englischer Sprache; die englische Übersetzung stammt von Mr. G. Greenwood, Kings College, London). Die Beschreibungen enthalten auch Angaben über die Größenverhältnisse im Gitter und verweisen auf gleich oder ähnlich strukturierte Kristalle. Die Tafeln sind geeignet, ein Eindringen in das Studium der Kristallgitter wesentlich zu erleichtern. E. Mosch. 743

Dr. PASCUAL **JORDAN,** Professor an der Universität Rostock, Anschauliche Quantentheorie. Eine Einführung in die moderne Auffassung der Quantenerscheinungen. XII + 320 S. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 13,80 RM.

Die Entstehung der Quantenmechanik ist ein Musterbeispiel für die Gemeinschaftsarbeit, auf der die meisten Fortschritte der Physik beruhen. Dieser Ursprung der Theorie in einem beständigen lebendigen Gedankenaustausch der einzelnen Forscher hatte aber den Nachteil, daß ihre schriftliche Fixierung oft genug hinter dem gedanklichen Fortschritt zurückblieb. Noch heute ist es kaum möglich, aus Büchern und Abhandlungen ein zutreffen-

des Bild von den tieferen Zusammenhängen zu gewinnen, welche die physikalische Geschlossenheit der Theorie und ihren Zusammenhang mit der klassischen Physik verbürgen, und deren eindringende Analyse das wichtigste Verdienst von Bohr und seiner Schule ist. Das vorliegende Buch versucht diese Lücke auszufüllen. Man muß zugeben, daß diese außerordentlich schwierige Aufgabe gut gelöst ist. Das Buch wird wohl nicht als erste Einführung oder als eigentliches Lehrbuch dienen können; aber es wird sehr gute Dienste leisten, um andere, mehr formale Darstellungen zu ergänzen und erst richtig verständlich zu machen. Mancher mathematisch eingestellte Leser wird sich vielleicht zunächst an dem Mangel an Strenge in vielen Erörterungen stoßen. Aber gerade darin dürfte der pädagogische Wert des Buches liegen, daß es den Leser zwingt, dieser Art von Überlegungen zu folgen, durch welche die Theorie historisch wirklich entstanden ist. Es sollte den Leser dazu erziehen, die Sicherheit und Klarheit einer physikalischen These nicht nach der mathematischen Strenge ihrer Formulierung zu beurteilen, die oft noch gar nicht endgültig sein kann, sondern nach dem richtigen Ausgewogensein der physikalischen, „anschaulichen" Argumente, deren letzte Zusammenfassung sie ist.

Das Buch gliedert sich in fünf Kapitel. Das erste, über die Grundexperimente der Quantentheorie, zeigt bereits an verhältnismäßig einfachen Fällen die Anwendung der charakteristisch quantentheoretischen Denkmethoden. Das zweite Kapitel ist in der Hauptsache der wichtigsten dieser Methoden, dem Korrespondenzprinzip, gewidmet und zeigt, wie weit man im Verständnis der Erfahrungen kommen kann, noch ehe man den strengen Formalismus besitzt. Das dritte Kapitel ist diesem Formalismus gewidmet, das vierte zeigt seine Fortbildung bis in die heute noch nicht geklärten Fragen der Theorie des elektromagnetischen Feldes und der Elementarteilchen hinein. Das fünfte Kapitel enthält Betrachtungen zur Biologie und Philosophie, die man mehr als das Vorangegangene als Privatmeinungen des Verfassers ansehen muß; jedoch werden auch Leser von sachlich abweichender Auffassung mit ihm einig sein über die Notwendigkeit, die gegenseitige Abschließung der Wissenschaften zu lockern, und werden seinen Versuch dankbar begrüßen.

Berlin-Dahlem. C. F. v. Weizsäcker.

Dr. FRANZ **VON KRBEK**, Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Mathematik. Neue Deutsche Forschungen, herausgegeben von H. R. G. Günther und E. Rothacker. Band 81, Abt. Mathematik in Verbindung mit G. Hamel, G. Kowalewski. W. Süß, E. Tornier herausgegeben von G. Feigl. Bd. 1. 64 S. Berlin 1936, Verlag Junker & Dünnhaupt. Preis brosch. 3,20 M.

Verf. will die nichtrelativistische Quantenmechanik, bei deren Aufbau die Darstellungen meist der historischen Entwicklung folgen, auf möglichst abstraktem Wege ableiten, d. h. auf einem Wege, der sich, abgesehen von einem Minimum physikalischer Gegebenheiten, ausschließlich mathematischer Betrachtungen bedient, um zu Formulierungen zu kommen, die erst am Ende des Weges dann ihre physikalische Interpretation finden. Im ersten, mehr einleitenden Kapitel („Die Genesis der Theorie") stellt Verf. in knappster Form die Grundlagen und Hauptsätze der Thermodynamik dar; es dient gleichzeitig der Illustration des Verfahrens, das bei den weiteren Entwicklungen eingeschlagen werden soll, jenes Verfahrens also, das, wie Verf. es ausdrükt, „das Konkrete so weit streicht, daß das Übrigbleibende mit dem experimentellen Befund in der Art von Gedankenexperimenten verbunden bleibt und zur Führung der klassischen Schlußweise gerade hinreicht". Das Kapitel schließt mit Bemerkungen über die Wesensunterschiede zwischen den drei in der theoretischen Physik verwendeten Statistiken und der Erläuterung des Planckschen Strahlungsgesetzes. Das zweite Kapitel („Die Ansätze der Wellenmechanik") gibt eine vorläufige Darstellung der Grundlagen und wichtigsten Begriffe der Wellenmechanik, ausgehend von der Schrödingergleichung, die auf Grund des Parallelismus zwischen Photon und Partikel aufgestellt und dann als allgemeingültig postuliert wird. An wichtigen Begriffen werden die der Operatoren, ihrer Vertauschbarkeit bzw. Nichtvertauschbarkeit und ihrer physikalischen Bedeutung, ferner die Begriffe des normierten Orthogonalsystems, der Wahrscheinlichkeitsamplitude eines bestimmten Wertes einer physikalischen Größe und des Erwartungswertes dieser Größe eingeführt. Im Anschluß an die Schrödingergleichung werden einige kurze Bemerkungen über das Kausalitätsproblem gemacht, über dessen Gültigkeit von hier aus, wie Verf. wohl mit Recht meint, keine Entscheidung getroffen werden kann. Im dritten Kapitel wird dann der „Hilbertraum" als Grundlage der Quantenmechanik behandelt. Zunächst werden — wieder in knappster Form und unter Hinweis auf die ausführlichere Behandlung des Gegenstandes in den Werken von J. von Neumann: „Mathematische Grundlagen der Quantentheorie", 1932 und Stone: „Linear Transformations in Hilbert Space", 1932 — die Eigenschaften des „abstrakten" Hilbertraumes dargelegt, der durch die fünf v. Neumannschen Axiome definiert ist; es wird dann gezeigt, daß dieser Raum isomorph ist mit dem von Hilbert eingeführten Raum, dessen Punkte absolutwertquadratkonvergente Zahlenfolgen sind. Dann erfolgt die Interpretation des abstrakten Hilbertraumes mit Hilfe des Lebesgueintegrals; mit der Einführung des Transformationsbegriffs und des Begriffs der selbstadjungierten (Hermiteschen) Operatoren wird der Anschluß an die Quantentheorie gewonnen, deren Grundzüge dann im letzten Kapitel dargestellt werden; dabei gelangt man ganz von selbst z. B. zu den Heisenbergschen Ungenauigkeitsrelationen, die ja sonst vielfach als Ausgangspunkt der Betrachtungen gewählt werden. Am Schluß weist Verf. darauf hin, daß diese Quantenmechanik, deren Grundlagen er mittels des Hilbertraums formuliert hat, zunächst nur einen Ausschnitt aus dem atomaren Geschehen darstellen kann, schon nach Art der Ableitung, die ja als Grundlage nur den Parallelismus zwischen Photon und Partikel benutzt, aber z. B. keine Annahme über den Aufbau des Atoms gemacht hatte. E. Mosch. 743

Dr. S. **FLÜGGE**, Institut für theoretische Physik an der Universität Leipzig, und Dr. A. **KREBS**, Institut für physikalische Grundlagen der Medizin an der Universität Frankfurt a. M., Experimentelle Grundlagen der Wellenmechanik. Wissensch. Forschungsberichte. Naturwissensch. Reihe, herausgegeben von Dr. R. E. Liesegang, Frankfurt a. M. Band 38. X + 236 S. mit 92 Abb. Dresden u. Leipzig 1936, Verlag Th. Steinkopff. Preis 17 M.

Dies Buch ist die Gemeinschaftsarbeit zweier Autoren, von denen der eine (A. Krebs) Experimentalphysiker, der andere (S. Flügge) theoretischer Physiker ist. Trotzdem zerfällt dasselbe nicht in zwei getrennte Teile, die beiden Autoren haben wirklich Hand in Hand gearbeitet, so daß ein einheitliches Ganzes entstanden ist. Der Titel des Buches ließe allerdings erwarten, daß das Schwer-

gewicht der Darstellung auf das Experiment entfalle. Das ist aber nicht der Fall. Die Darstellung der theoretischen Zusammenhänge überwiegt, und das ist auch verständlich, da, wie die Verfasser im Vorwort selbst sagen, der Hauptzweck des Buches sein soll, „den imposanten Siegeslauf der Wellenmechanik im verflossenen Dezennium an uns vorüberziehen zu lassen". Die Mitarbeit des Experimentalphysikers hat aber den Erfolg gehabt, daß die grundlegenden Experimente doch soweit auseinandergesetzt werden, wie es zum Verständnis der Theorie unbedingt notwendig ist.

Der Inhalt zerfällt in 8 Kapitel: Freie Teilchen, Der Dualismus Welle-Korpuskel, Rekapitulation der Elemente der Wellenmechanik, Atome, Moleküle, Stoßprobleme, Zusammenhängende Materie, Physik und Chemie des Atomkernes. Es wird also auf 236 Seiten viel geboten, und um das durchführen zu können, ist die Darstellung sehr knapp gehalten. Das hat zur Folge, daß das Buch sich nicht zur Einführung eignet, wer aber von den Problemen schon einiges weiß, und wer insbesondere mathematisch gut geschult ist, kann sich an Hand dieses Buches über den gegenwärtigen Stand der Forschung schnell und zuverlässig informieren.

W. Grotrian. 721

P. **DEBYE,** Methoden zur Bestimmung der elektrischen und geometrischen Struktur von Molekülen, Nobelvortrag, gehalten am 10. Dezember 1936 in Stockholm. 34 S. Leipzig 1937, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 1,50 M.

In dem äußerst klaren, interessanten Vortrag geht der Vortragende davon aus, daß die außerordentlich großen Suszeptibilitäten, die man in der Liste der Dielektrizitätskonstanten findet, nicht nur durch Verschiebung der Elektronen zu erklären sind, sondern in der Hauptsache auf die Orientierung permanenter elektrischer Momente zurückgeführt werden müssen. Im ersten Teil des Vortrages wird über die Methoden zur Messung dieser Dipolmomente berichtet, insbesondere über ihre Bestimmung an polaren Substanzen in unpolaren verdünnten Lösungen. Der zweite Teil erläutert an einer Reihe charakteristischer Beispiele die Bedeutung der Dipolmomente für die Fragen der Molekülstruktur; vor allem wird die Bestimmung der Atomabstände im Molekül durch interferometrische Untersuchungen erörtert. Dabei ergibt sich, daß die physikalischen Methoden die zuerst auf chemischem Wege gewonnenen Ansichten über den räumlichen Bau der Moleküle vollkommen bestätigen.

Willers. 704

ERNST **ZIMMER,** Umsturz im Weltbild der Physik, mit einem Geleitwort von Dr. Max Planck. 3. Aufl. 270 S. m. 59 Abb. München 1936, Verlag Knorr & Hirth, G. m. b. H. Preis geb. 5,70 M.

Daß schon knapp zwei Jahre nach Erscheinen der ersten eine dritte Auflage dieses Buches nötig wurde, zeigt einerseits, daß es seinen Zweck, einem größeren Kreise einen lebendigen Eindruck von den Ergebnissen und vom Sinn und Wert moderner physikalischer Forschung zu vermitteln, erfüllt und zeigt andererseits, daß erfreulicherweise auch tatsächlich in weiten Kreisen ein Interesse für diese Fragen besteht.

Infolge der kurzen Zeit, die seit dem ersten Erscheinen des Buches verflossen ist, sind sachlich kaum Änderungen erforderlich gewesen, nur der Abschnitt über Kernphysik ist durch eine Darstellung der Grundgedanken von Heisenberg und Fermi erweitert.

Willers. 704

Dr. H. **WEINREICH,** Oberstudiendirektor am Schillerrealgymnasium in Stettin. Physikalische Beobachtungs- und Denkaufgaben des Alltags. (Mathem.-Physik. Bibliothek Reihe I, Nr. 90.) 52 S. m. 5 Fig. i. Text. Leipzig u. Berlin 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

In dem Heftchen sind 142 leichtere und schwierigere Denkaufgaben aus allen Gebieten der Physik behandelt. Die Fragen werden in fünf Gruppen eingeordnet: Daheim; Aus der uns umgebenden Natur; Aus dem Verkehrswesen; Der menschliche und tierische Körper; Verschiedenes. Die hier gesammelten Aufgaben wollen „die Augen öffnen für die in unserer Umwelt sich täglich abspielenden Naturvorgänge und zum Nachdenken darüber anregen". Dieses Ziel ist in dem Bändchen durchaus erreicht worden. Daß sich unter den Aufgaben auch eine Reihe von solchen befinden, die von jeher zum eisernen Bestand des Physikunterrichts gehört haben, und die auch in den Schulphysikbüchern angedeutet oder ausführlich behandelt sind, versteht sich von selbst und ist kein Nachteil. Außerdem aber treten uns durchaus neuartige und hübsche Aufgaben entgegen, die durch ihren Inhalt oder durch ihre Einkleidung überraschen; viel Anregung findet man z. B. unter den aus dem Verkehrswesen stammenden Aufgaben. Das Büchlein bietet eine Fülle von interessantem Stoff, der besonders auch dem Anfänger, der seinen Unterricht lebendig und fruchtbar gestalten möchte, wertvolle Hilfen und Fingerzeige zu geben vermag. Ein alphabetisches Sachverzeichnis gestattet es, die einem bestimmten Gebiet der Physik angehörenden Fragen schnell aufzufinden.

E. Mosch. 743

EUKLID, Die Elemente. Nach Heibergs Text a. d. Griechischen übers. u. hrsg. v. Clemens Thaer, IV. Teil (Buch X), (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 241). 119 S. Leipzig 1936, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis kart. 5,60 M.

Das zehnte Buch Euklids behandelt im geometrischen Gewand die irrationalen Größen, die bei den auf Grund der Postulate ausgeführten Konstruktionen auftreten, soweit sie für die Theorie der regulären Körper erforderlich sind. Es ist „die klassische Schule der Unmöglichkeitsbeweise" Infolge der Schwierigkeiten des Gegenstandes, der hier behandelt wird, sind schon früh an diesem Buch Änderungen vorgenommen, ferner sind darin eine Reihe von Erweiterungen eingeschoben worden. In dem Ausscheiden solcher Zusätze geht die vorliegende Ausgabe, die auch die arabische Überlieferung berücksichtigt, weiter als Heiberg, der nur griechische Handschriften heranzog. Obwohl der Herausgeber durch eine kurze Inhaltsübersicht und durch zahlreiche erläuternde Anmerkungen, die er am Schluß des Bändchens gibt, das Studium zu erleichtern sucht, muß der nicht gerade geschichtlich Interessierte immer noch große Energie aufwenden, wenn er sich durch das Gestrüpp von Definitionen und Sätzen dieses zehnten Buches des Euklid durcharbeiten will.

Willers. 697

KURT **MEUSEMANN,** Kapitänleutnant, und Dr. KURT **STANGE,** Studienrat a. d. Marineschule in Flensburg-Mürwick. Mathematik und Marine. (Mathem.-Physik. Bibl. Reihe I, Nr. 89.) 48 S. m. 37 Abb. i. Text. Berlin u. Leipzig 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Dem begrüßenswerten Streben, im Schulunterricht erklügelte Textaufgaben durch lebensnahe zu ersetzen, an denen der Schüler nicht nur lernt, die

mathematische Formulierung aus dem Text herauszuschälen, sondern die ihm darüber hinaus zeigen, wo im Leben die Mathematik eine Rolle spielt und die ihm daneben lebenswichtige Erkenntnisse vermitteln, dient auch das vorliegende Bändchen. Es bietet aus einem, den größten Teil der Schüler lebhaft interessierenden Gebiet eine Reihe neuer Aufgaben über Geschwindigkeit, Wind und Strom, Kreuzeraufgaben, Aufgaben über Seetaktik, Tiefenbestimmung und über Brennstoffverbrauch und Geschwindigkeit, und gibt dazu die Lösungen in analytischer, oft aber auch in geometrischer Form.

Willers. 722

Dr. RUDOLF **ROTHE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Höhere Mathematik, Teil IV, Übungsaufgaben/Formelsammlung, bearb. von Stud.-Rat O. Degosang, 4. Heft (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 36), Seite 51—106 m. 28 Abb. Leipzig und Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis 2,40 M.

Das vorliegende vierte Heft des vierten Bandes enthält 166 Übungsaufgaben und Lösungen aus folgenden Gebieten: Unendliche Reihen, Integrale, die von einem Parameter abhängen, und Linienintegrale, Determinanten, lineare Gleichungen, Kegelschnitte, Vektorrechnung, Gerade und Ebene im Raum, Raumkurven. Und da der Kritiker sonst bei den Rotheschen Büchern so selten auf seine Kosten kommt, sei es erlaubt zu bemerken, daß der Wachsamkeit des Verfassers diesmal auf der vorletzten Seite ein lustiger Fehler entgangen ist.

Freiberg (Sa.). Grüß. 750

Dr. J. **HORN,** em. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine u. angewandte Mathematik, Bd. 10.) VIII + 196 S. m. 4 Fig. Berlin W 35 u. Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 10.50 M.

Die vorliegende dritte Auflage des mit Recht viel benutzten Buches ist ein anastatischer Neudruck. Was in dieser Zeitschrift Band 8 (1928) S. 152 von Funk zur zweiten Auflage lobend gesagt wurde, gilt auch für diesen Neudruck, der gegenüber der vorigen Auflage nur ganz geringe Änderungen aufweist.

Willers. 772

Dr. RUDOLF **WEYRICH,** o. ö. Prof. d. Math. an der Techn. Hochschule Brünn, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. IV + 137 S. m. 8 Abb. Leipzig und Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 7.60 M.

Das vorliegende Buch soll als Ersatz für das bekannte Buch von Schafheitlin über Besselsche Funktionen dienen. Es behandelt die Zylinderfunktionen in engem Zusammenhang mit den Tafeln von Jahnke-Emde, indem es einerseits die Anwendung dieser Tafeln erläutert, andererseits sich häufig auf diese, insbesondere auf die in ihnen gegebenen Abbildungen, bezieht.

Ausgehend von der allgemeinen Schwingungsgleichung gelangt der Verfasser durch Überlagerung von den ebenen über die Kugel- zu den Zylinderwellen und von diesen zu den verschiedenen Integraldarstellungen, insbesondere zu denen von Sommerfeld. Aus diesen wird dann verhältnismäßig leicht alles Wichtige, wie funktionentheoretische Eigenschaften, Potenz- und asymptotische Entwicklungen, Funktionalgleichungen, Additionstheoreme usw. abgeleitet. Insbesondere wird vieles, was der numerischen Erfassung dieser Funktionen und ihrer Nullstellen dient, behandelt. Eine sehr kurze Darstellung der Entwicklung willkürlicher Funktionen in Zusammenhang mit den zugehörigen Randwertaufgaben gewinnt der Verfasser dadurch, daß er einige Sätze der Sturm-Liouvilleschen Theorie und der Theorie der Integralgleichungen als bekannt voraussetzt. Ein Kapitel, das einige Anwendungen auf Probleme der Physik und der Technik bringt, schließt das Buch ab.

Dem Verfasser ist es gelungen, auf engem Raum, wenn auch teilweise referierend, einen umfangreichen Stoff, der alles umfaßt, was der sich für die Anwendungen interessierende Mathematiker und der wissenschaftlich arbeitende Ingenieur braucht, klar und verständlich darzustellen. Das Buch wird sicher viel gebraucht werden, da es eins der wenigen ist, die eine tatsächlich in der deutschen mathematischen Literatur vorhandene Lücke vortrefflich ausfüllen.

Willers. 712

EDMUND **LANDAU,** Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 35.) 94 S. London 1937, Cambridge University Press. Preis 6 sh.

Das Buch behandelt folgendes: Das 1. Kapitel bringt Ergänzungen zum Waringschen Theorem, das 2. gehört zum Problemkreis der Goldbachschen Vermutung, das 3. und 4. gibt Sätze über Dichtigkeiten gewisser Zahlenmengen. Im Anhang wird eine Siegelsche asymptotische Abschätzung der Klassenzahl definitiver binärer quadratischer Formen hergeleitet. Man kann nur hoffen, daß die bekannte viel umstrittene Darstellungsweise des Verfassers diesen schwierigen und schönen Problemen neue Freunde zuführen möge. Den Lesern dieser Zeitschrift bietet das Buch kaum etwas, sie werden für die 139 numerierten „Weltfunktionen“ und „Weltkonstanten“, von denen keine näherungsweise bestimmt wird, ebensowenig Verständnis zeigen wie für die Wichtigkeit der „Namen der Inhaber der derzeitigen Rekorde“.

Halle. H. Brandt. 731

Dr. HELMUT **HASSE,** o. ö. Prof. d. Math. a. d. Univ. Göttingen, Höhere Algebra, II. Gleichungen höheren Grades (Sammlung Göschen, Bd. 932). 2. verbess. Aufl. 158 S. m. 5 Fig. Berlin und Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Die 2. Aufl. des 1. Bändchens wurde bereits in Bd. 13 S. 393 dieser Zeitschrift angezeigt. Wer, wie vielleicht mancher ihrer Leser, einen Leitfaden für die praktischen algebraischen Methoden sucht, darf nicht zu diesen Bändchen greifen. Sie sind vielmehr durchaus für den Theoretiker bestimmt und geben eine vorzügliche Einführung in die moderne Auffassung der Lehre von den Gleichungen. Im besonderen enthält das 2. Bändchen eine ausgezeichnete Darstellung der Galoisschen Theorie.

Halle (Saale). H. Brandt. 769

Dr. phil. L. C. **DUE,** Die Brückenverbindungstheorie und ihre Anwendung zur Klasseneinteilung und Klassenzusammensetzung quadratischer Irrationalzahlen und binärer quadratischer Formen. 39 S. Kopenhagen 1936, Verlag Levin & Munksgaard. Preis 4,50 Kr.

Theorie der Äquivalenz quadratischer Irrationalzahlen mit neuer Terminologie (z. B. Amphibienklassen und Antiamphibienklassen) aber unter Vernachlässigung bekannter wichtiger Gesichtspunkte.

Halle. H. Brandt. 731

TIBOR **RADO,** Subharmonic Functions. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, hrsg. v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" 5. Bd., 1.) V + 56 S. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 6.60 M.

Etwas grob ausgedrückt, kann man eine Funktion $f(x)$ konvex nennen, wenn sie der Differentialungleichheit genügt $f''(x) \geq 0$. Eine der möglichen Ausdehnungen dieses Begriffs der Konvexheit auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ist die folgende: Man nennt eine Funktion $f(x, y)$ harmonisch, wenn

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = 0$$

ist, und subharmonisch, wenn $\Delta f \geq 0$ ist. Beispielsweise ist der absolute Betrag einer analytischen Funktion subharmonisch, ferner ein logarithmisches Potential, das von negativen Massen stammt. Umgekehrt läßt sich eine subharmonische Funktion in solcher Weise als Potential darstellen. Der Verfasser zeigt, daß man diesen Begriff dazu verwenden kann, um viele theoretische Überlegungen einheitlicher zu gestalten und zu vereinfachen.

Hamburg. Wilhelm Blaschke. 729

JOSEPH MILLER **THOMAS,** Professor of Mathematics, Duke University, Differential Systems. (American Mathematical Society Colloquium Publications Vol. XXI.) IX + 119 S. New York 1937, publ. by American Mathematical Society. Preis 2 $.

Auf Grund von Gedanken, die von H. Graßmann stammen, ist hauptsächlich von H. Poincaré und E. Cartan ein Rechenverfahren mit Differentialformen entwickelt worden, das trotz seiner vielfältigen Anwendbarkeit in Geometrie und Physik noch wenig bekannt ist. Über diesen Gegenstand ist jüngst ein Buch von E. Kähler erschienen unter dem Titel: Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, B. G. Teubner 1934. Kähler hat später (Abhandlungen des Mathematischen Seminars Hamburg 12, 1937) gezeigt, wie durchsichtig sich dies Verfahren beispielsweise zur Darstellung und Weiterbildung von Maxwells Theorie verwenden läßt. Jetzt bringt J. M. Thomas in dem vorliegenden Buch eine etwas ausführlichere und leichter lesbare Darstellung dieses wichtigen Gegenstandes, der überall dort, wo man es mit Differentialgleichungen zu tun hat, wie z. B. in der Variationsrechnung, zu weitgehender Vereinfachung der rechnerischen Hilfsmittel führt. Auch in der Topologie, insbesondere in Arbeiten von de Rham haben sich diese Methoden als fruchtbar erwiesen. Leider fehlt bisher eine Darstellung, die für Physiker und Techniker leichter zugänglich wäre. Es können dann viele umständliche Vektormethoden vermieden werden.

Hamburg. Wilhelm Blaschke. 719

Dr.-Ing. habil. ULRICH **GRAF,** Dozent a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Darstellende Geometrie. 174 S. m. 281 Abb. Leipzig 1937, Verlag Quelle & Meyer. Preis geb. 4 M.

Auf engem Raum werden die wesentlichen Methoden und Anwendungen der Darstellenden Geometrie kurz, klar und anregend dargestellt. Die Fülle des Stoffes macht dem Verfasser eine vollkommene Durchführung mancher Entwicklungen unmöglich; an deren Stelle treten wirkungsvoll die Hinweise auf die zahlreichen Abbildungen, die sehr geschickt ausgewählt und vorzüglich angelegt sind. Das Buch bietet dem Leser eine gute Übersicht über die praktisch bedeutungsvollen Teile der Darstellenden Geometrie.

Dresden. W. Ludwig. 718

Dr. ROBERT **SAUER,** a. o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Aachen, Projektive Liniengeometrie. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, reine und angewandte Mathematik, Bd. 23.) 194 S. m. 36 Abb. Berlin u. Leipzig 1937, Verlag Walter de Gruyter. Preis geb. 9 M.

In eine der reizvollsten geometrischen Forschungsrichtungen führt ohne Zweifel das Studium der Liniengeometrie. Wenn trotzdem ihre Kenntnis, abgesehen von den allerersten grundlegenden Tatsachen, auf ganz enge Kreise der Mathematiker beschränkt ist, so liegt es daran, daß der Anfänger es nicht ganz leicht hat, sich in der überreichen Fülle des Schrifttums zurechtzufinden. Er wird hier einen sicheren Führer finden. Aber auch der Sachkenner wird mit Genuß der leichtflüssigen Darstellung folgen, deren größter Vorzug es ist, daß die geometrische Fragestellung immer im Vordergrunde steht und nicht überwuchert wird durch analytisches Beiwerk. Gewiß wird der Leser auch mit der Anwendung des analytischen Apparats vertraut gemacht, aber dieser ist nur ein nützliches Werkzeug, nicht Selbstzweck.

Wenn auch die Darstellung sich hauptsächlich an den „reinen" Geometer wendet, so wird auch der „angewandte" Mathematiker so manches finden, was seinem Aufgabenkreise nahesteht. Vielleicht zu seiner Überraschung, handelt es sich für ihn doch ausschließlich um metrische Fragen und ist er daher leicht geneigt, die projektive Geometrie als eine spitzfindige Angelegenheit des Theoretikers ohne praktischen Nutzen anzusehen. Hier erfährt er, daß z. B. die Gesetze der Spannungsverteilung in Membranen sich umdeuten lassen in Sätze über infinitesimale Flächenbiegung und diese rein metrische Frage wiederum zu merkwürdigen projektiven Zusammenhängen führt. Er wird sich überlegen müssen, ob es sich für ihn doch nicht lohnen würde, sich mit diesen scheinbar so weitab liegenden Dingen zu beschäftigen. Ihm wäre nichts Besseres anzuraten, als zu diesem Buche zu greifen!

Berlin. E. Salkowski. 747

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. FR. **BOSNJAKOVIC,** a. o. Prof. a. d. Techn. Fakultät d. Univ. Zagreb (Agram), Technische Thermodynamik, II. Teil (Wärmelehre und Wärmewirtschaft in Einzeldarstellungen, Bd. XII), XIV + 290 S. m. 243 Abb. Dresden und Leipzig 1937, Verlag Theodor Steinkopff. Preis geb. 19 M.

Diagramme zu Technische Thermodynamik II, eine Mappe mit 7 Diagrammtafeln. Dresden und Leipzig 1937, Verlag Theodor Steinkopff. Preis 8 M.

Dr.-Ing. W. **HENN,** Grundlagen der Wassermessung mit dem hydrometrischen Flügel, Mitteilungen aus dem Flußbau-Laboratorium der Techn. Hochsch. Dresden (VDI-Forschungsheft 385, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 8, Juli/August 1937). 22 S. m. 41 Abb. und 1 Zahlentafel. Berlin 1937, VDI-Verlag. Preis 5 M.

GIAN DOMENICO **MATTIOLI,** Professore alla Facolta di Scienze di Catania, Teoria Dinamica dei Regimi Fluidi Turbolenti. XI + 323 S. Padova 1937, Verlag Cedam.

MAURICE **BRICAS,** La Théorie de l'Elasticité Bidimensionnelle. 398 S. Athen 1937.

Dr. KARL **GEY**, Oberstudiendirektor in Leipzig, Dr. habil. HORST **TEICHMANN**, Dozent für Physik a. d. Techn. Hochschule Dresden, Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik.) 2. verb. Aufl. (Math.-Physik. Bibl. Reihe II, Abrisse aus dem Gebiete der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften, Bd. 11). 116 S. m. 61 Abb. u. 2 Taf. Leipzig u. Berlin 1937. Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 3,20 M.

Dr. RUDOLF **ROTHE**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen/Formelsammlung unt. Mitw. v. Studienrat Oskar DEGOSANG, Ass. a. d. Techn. Hochschule Berlin. 5. Heft, Raumkurven und Flächen, Linienintegrale und mehrfache Integrale. (Teubners Mathem. Leitfäden, Bd. 37), 54 S. m. 46 Abb. Dgl. Heft 6 (Teubners Math. Leitfäden, Bd. 38), 105 S. m. 13 Abb. Leipzig u. Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis je Heft kart. 2,40 M.

PAUL **LUCKEY**, Oberstudienrat i. R., Nomographie, praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. 3. verb. Aufl. (Math.-Physik. Bibl. Reihe I, Bd. 59/60.) 107 S. m. 57 Abb. u. 48 Aufg. Leipzig u. Berlin 1937, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 2,40 M.

EBERHARD **HOPF**, Ergodentheorie. (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben v. d. Schriftl. des „Zentralblatt für Mathematik", 5. Bd., 2.) IV + 83 S. m. 4 Fig. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 9,80 M.

Dr.-Ing. G. **VOGELPOHL** VDI, Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung, Mitteilung aus dem Institut für Techn. Strömungsforschung a. d. Techn. Hochschule Berlin, Leitung: Prof. Dr.-Ing. H. Föttinger VDI (VDI-Forschungsheft 386, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 8, Sept./Okt. 1937.) 28 S. m. 38 Abb. u. 6 Zahlentafeln. Berlin 1937, VDI-Verlag, GmbH. Preis 5 M.

CLEMENS **MÜNSTER**, Das Fernrohr. (Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte, 9. Jahrgang, Heft 4) 34 S. m. 21 Abb. Berlin 1937, VDI-Verlag, GmbH. Preis brosch. 0,90 M.

ALFRED **TARSKI**, Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik. X + 166 S. Wien 1937, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 7,50 M.

Dr. phil. GEORG **HAMEL**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Integralgleichungen, Einführung in Lehre und Gebrauch. VIII + 163 S. m. 19 Abb. i. Text. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis geb. 12 M.

Dr. Ing. BRUNO **ECK**, Ventilatoren, Entwurf und Betrieb der Schleuder- und Schraubengebläse. VII + 197 S. m. 192 Abb. Berlin 1937, Verlag Julius Springer. Preis geb. 13,50 M.

Verzeichnis von Schrifttum-Auskunftstellen der Technik und verwandter Gebiete. (Deutscher Normenausschuß.) 64 S. Berlin 1937, Beuth-Verlag G. m. b. H. Preis geh. 1,60 M.

Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen (Deutscher Normenausschuß). 16 S. Berlin 1937, Beuth-Verlag G. m. b. H. Preis geh. 0,40 M.

NACHRICHTEN

Carl Cranz zum achtzigsten Geburtstage.

Am 2. Januar 1938 wird der Physiker und Ballistiker Carl Cranz das achte Jahrzehnt vollenden. Mehr als die Hälfte dieser Zeit hat er in fruchtbringender Arbeit und mit bewundernswürdigem Fleiße der Ballistik gewidmet. Bis vor kurzem war er der Leiter des Instituts für angewandte Physik an der Technischen Hochschule Berlin, des früheren ballistischen Laboratoriums der Militärtechnischen Akademie. Die Förderung der Ballistik durch Cranz' Wirken und das seiner Schüler erkennt man am besten, wenn man das vor 40 Jahren erschienene Cranzsche Kompendium der äußeren Ballistik (1896) mit der neuesten vierbändigen Auflage seines Lehrbuches der Ballistik (1937) vergleicht, das aus dem Kompendium hervorgegangen ist. Dieses Werk ist das ausführlichste, vollständigste und zuverlässigste Lehrbuch der gesamten Schießlehre und wird von jedermann in Deutschland und im Ausland als solches anerkannt. Wer die Ballistik wissenschaftlich betreiben und fördern will, muß die gesamten physikalischen Meßverfahren in gleicher Weise beherrschen wie die Methoden der angewandten Mathematik. Cranz besitzt diese seltene Eigenschaft in hervorragendem Maße, und seine ballistischen Entdeckungen gehören teils dem physikalischen, teils dem mathematischen Teil der Ballistik an: ich nenne nur die Kinematographie des fliegenden Geschosses mit extrem hoher Bildfrequenz (3.10^6 Hertz) einerseits, die Methode der Normalbahnen andrerseits. Wer das Glück hat, mit ihm zusammen zu arbeiten, wird im Laboratorium seine physikalische Erfahrung und seine Experimentierkunst, am Schreibtisch seine erstaunliche Leichtigkeit in der Handhabung des Mathematischen und seine vorbildliche Ausdauer und Sorgfalt bei der Durchführung der oft ermüdenden rechnerischen und zeichnerischen Kleinarbeit bewundern können. Es ist hier nicht Zeit noch Ort, im einzelnen die Verdienste Cranzens um die Ballistik aufzuzählen. Diese wenigen Zeilen sollen ja nur einen Glückwunsch für das 80jährige Geburtstagskind darstellen und ein Zeichen der Verehrung sein, die dem gütigen Freunde und Lehrer seine Kollegen und Schüler freudig zollen, und schließlich der Freude Ausdruck geben, daß der Unermüdliche nach zweijähriger Abwesenheit aus dem fernen Osten wieder glücklich heimgelangt ist. Möge es ihm vergönnt sein, sich noch manche Jahre des Abendfriedens eines reichen und arbeitsamen Lebens zu erfreuen.

R. Rothe. 793

Zum 70. Geburtstag von W. M. Kutta.

Am 3. November beging Professor Dr. W. M. Kutta in Stuttgart seinen 70. Geburtstag. Seit 1911 bis zu seiner Emeritierung hat Prof. Kutta an der Technischen Hochschule Stuttgart die Mathematik in Vorlesungen und Übungen vertreten, nach Inhalt und Form so, daß Ingenieure und Mathematiker gleicherweise größten Gewinn davon haben konnten. War wesentliches Moment auch bei den

Vorlesungen für Ingenieure immer das Herausarbeiten des mathematischen Gedankens in voller Klarheit und Anschaulichkeit, so fehlte dabei nie die lebendige Bezugnahme zu den Anwendungen. Das war natürlich bei einem Lehrer, der als Forscher sich seit langem mit Fragen der angewandten Mathematik beschäftigt: numerische Integration von Differentialgleichungen und Anwendung der Funktionentheorie auf Probleme der Hydro- und Aerodynamik. Die unter dem Namen Runge-Kutta bekannte Methode zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist das jedem angewandten Mathematiker vertraute Ergebnis seiner Untersuchungen über bequeme und zweckmäßige numerische Näherungslösung von Differentialgleichungen bei höheren Genauigkeitsansprüchen. Die Kutta-Joukowskische Formel der Aerodynamik ist ein äußerer Beleg für die Tatsache, daß Kutta bereits in den ersten Jahrzehnten moderner theoretischer aerodynamischer Forschung heute noch grundlegende Arbeiten über die Anwendung der konformen Abbildung auf hydrodynamische Probleme schrieb. In einer öfters gehaltenen Vorlesung über Strömungstheorie hat er an unserer Hochschule wiederholt tiefen Einblick gegeben in diesen Problemkreis. — Wer das Glück hat, Kutta näher zu kennen, der weiß, daß das Vorstehende nur ein kleines Teilgebiet streift aus dem reichen Wissen dieser umfassenden Persönlichkeit.

Stuttgart. F. Pfeiffer. 774

Tagung der Lilienthal-Gesellschaft in München.

Die diesjährige Hauptversammlung der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung fand in München statt. Die Versammlung wurde von zahlreichen Vertretern der Wissenschaft und Industrie des In- und Auslandes besucht. Auf eine Reihe Vorträge, die die Luftfahrttechnik im allgemeinen betrafen, wie Fragen der Werkstoffkunde, der Entwicklung von Flugzeugen für den Überseeverkehr, des Höhenflugs, des Motorenbaus und der Navigation (Funkwesen), folgten in Parallelsitzungen die Fachvorträge über Flugzeugbau, Motorenbau und Flugfunkwesen. Den Leserkreis dieser Zeitschrift werden interessieren die Vorträge von M. Pistolesi: Einige Mitteilungen über luftfahrtwissenschaftliche Arbeiten in Italien. Betrachtungen über die gegenseitige Beeinflussung von Tragflügelsystemen. M. Gasperi: Geräte und Verfahren für Versuche im Überschall-Windkanal. A. Betz: Aufgaben und Verfahren der aerodynamischen Forschung. W. S. Farren: Über Ergebnisse aerodynamischer Untersuchungen an der Universität Cambridge. M. Kramer: Systematische Profiluntersuchungen im großen Windkanal der DVL. F. Weinig: Die schräg angeblasene Luftschraube. — Die Vorträge werden gesammelt herausgegeben.

Göttingen. I. Lotz. 784

Fünfter Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik (1938).

Wie schon früher (ZAMM Bd. 17 (1937) S. 62) bekanntgegeben, findet der Fünfte Internationale Kongreß für angewandte Mechanik vom 12. bis 16. September 1938 in Cambridge (Massachusetts, USA.) statt. Fachgenossen, die am Kongreß teilnehmen wollen, werden gebeten, ihre Anschrift an das Sekretariat des Kongresses (Professor J. C. Hunsaker, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., USA.) einzusenden und, falls sie einen Vortrag auf dem Kongreß zu halten beabsichtigen, diesen dort (oder auch bei den deutschen Mitgliedern des Internationalen Komitees: Professor L. Prandtl, Göttingen; Professor R. Grammel, Stuttgart) anzumelden. Über die Anmeldung zur Reise nach Amerika werden nähere Bestimmungen im Frühjahr 1938 bekanntgegeben werden.

Persönliches.

Es wurden ernannt:

Der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Wolfgang Haack zum ord. Professor für Mathematik und Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Der Dozent an der Universität Berlin Dr. Eberhard Hopf zum ord. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Leipzig.

Der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Rudolf Iglisch zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Dr. Franz Rellich zum ord. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Marburg.

Der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Robert Sauer zum ord. Professor für angewandte Mechanik und darstellende Geometrie an der gleichen Hochschule.

Geh. Regierungsrat Dr. Fr. Schilling, o. ö. Prof. für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule Danzig, wurde mit dem 1. Oktober 1937 von seinen amtlichen Verpflichtungen entbunden (emeritiert).

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zum Problem des Erstarrens für den durch zwei parallele Ebenen begrenzten Körper.

In seinem unter dieser Überschrift veröffentlichten Aufsatze[1]) behauptet Herr K. Lachmann, daß das von ihm darin behandelte Problem der Schmelzkurve allein von den zwei Konstanten k und ϑ_s abhänge, wo $k = \frac{q}{c}$ (q — Schmelzwärme, c — spezifische Wärme, je pro Volumseinheit) und $\vartheta_s = \frac{\Theta_s}{\Theta_0}$ (Θ_s — Schmelztemperatur, Θ_0 — konstante Anfangstemperatur der als linearer Leiter betrachteten Schmelze, an dessen Enden die konstante Temperatur Null herrscht). Dies wäre richtig, wenn für den Verlauf des Erstarrungsvorganges bloß das Verhältnis der Größen Θ_s und Θ_0 ceteris paribus maßgebend wäre und nicht auch ihre Differenz. Da Herr Lachmann bei seiner Reduktion auf dimensionslose Einheiten nämlich $\Theta_0 = 1$ setzt, ist ihm dabei entgangen, daß er im Falle $\Theta_0 \neq 1$ für die spezifische Wärme dann nicht den aus Tabellen zu entnehmenden Wert für c, der sich ja auf eine Temperaturerhöhung von 1 °C bezieht, benützen darf, sondern dafür $c \cdot \Theta_0$ setzen muß. Daher ist in seiner Gl. (32) auf S. 349 auch k durch $\frac{k}{\Theta_0}$ zu ersetzen, so daß auch ihre besonders für die Enden der Schmelzkurve eine wichtige Rolle spielende Wurzel α_0 nicht nur von ϑ_s, sondern auch von Θ_0 abhängt.

Diese Gl. (32) ergibt sich übrigens auch aus dem von J. Stefan[2]) gemachten Ansatze für die an der Schmelzgrenze eines einseitig begrenzten Leiters zu erfüllende Randbedingung, wenn die Wärme- und die Temperaturleitzahlen für den festen und den flüssigen Zustand als gleich angenommen werden, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und $a_1^2 = a_2^2 = a^2$. Wird das bei $x = 0$ befindliche Ende des sich in der

[1]) ZAMM 15 (1935), 345 bis 358.

[2]) Über die Theorie der Eisbildung, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1 (1890), 1 bis 6.

Richtung der positiven x-Achse ins Unendliche erstreckenden flüssigen Leiters plötzlich auf Null abgekühlt, dann ist, wenn $X = \alpha \cdot \sqrt{T}$ bei noch unbestimmtem α die Gleichung der Schmelzkurve sein soll, mit den obigen Bezeichnungen die Temperaturverteilung:

$$\Theta(X,T) = \frac{\Theta_s}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a}\right)} \cdot \Phi\left(\frac{X}{2a\sqrt{T}}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq X \leq \alpha\sqrt{T}$$

und

$$\Theta(X,T) = \frac{\Theta_s - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a}\right)\cdot\Theta_0 + (\Theta_0 - \Theta_s)\cdot\Phi\left(\frac{X}{2a\sqrt{T}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a}\right)}$$

$$\text{für } X \geq \alpha\sqrt{T},$$

wobei

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\xi^2} \cdot d\xi .$$

Zur Bestimmung von α dient dabei die Bedingung an der Schmelzgrenze[3])

$$\frac{\Theta_s}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a}\right)} - \frac{\Theta_0 - \Theta_s}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a}\right)} = \frac{q\cdot\varrho\cdot\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{\alpha^2}{4a^2}},$$

wo q und ϱ die Schmelzwärme pro Masseneinheit und die Dichte bedeuten. Diese Gleichung ist nun mit (32) identisch, wenn wegen $\lambda = a^2 \cdot c \cdot \varrho$ darin noch $k = \frac{q}{c\cdot\Theta_0}$ gesetzt und dimensionslose Einheiten eingeführt werden durch $t = a^2 T$, wofür man formal auch einfach $a^2 = 1$ setzen kann (Herr Lachmann schreibt a an Stelle von a^2).

In dem für Kupfer mit $\Theta_0 = 1250^0$ C und $\Theta_s = 1000^0$ C ausgeführten Beispiele setzt Herr Lachmann $c = 0{,}12$ kcal/kg und erhält so $k = 350$ anstatt $k = 0{,}28$, wodurch er für $\alpha_0 = 0{,}06725$ erhält anstatt $\alpha_0 = 1{,}258$. Dieser fast 20 mal kleinere Wert für α_0 hat nun auch die überaus großen Sprünge des Temperaturgradienten an der jeweiligen Schmelzgrenze zur Folge (Abb. 13 auf S. 357), die durch die ganz unmöglich hohe Schmelzwärme $42 \cdot 1250 = 52500$ kcal/kg erklärlich werden, wodurch man ja die von ihm als zu klein in Rechnung gesetzte spezifische Wärme deuten kann. Unter den obigen Annahmen schreitet daher der Erstarrungsprozeß auch bedeutend rascher ins Innere fort, als sich aus dem Lachmannschen Werte für α ergibt. So findet man nach Lachmann, daß für $T = 0{,}1$ sec. die Schmelzgrenze erst etwa bei $X = 0{,}02$ cm angelangt wäre, während sie sich tatsächlich schon etwa bei $X = 0{,}4$ cm befindet.

Daß wir uns über den Erstarrungsprozeß keine quantitativ wenigstens einigermaßen zutreffende Vorstellung machen können, kann man daraus ersehen, daß die von Herrn Lachmann berechnete Temperaturverteilung gar keinen Verdacht auf das unterlaufene Versehen aufkommen ließ, obwohl es sich doch sehr empfindlich auswirkt. Es ist deswegen sehr zu bedauern, daß den von Herrn Lachmann mit so großer Genauigkeit und dementsprechender Mühe berechneten Temperaturverteilungskurven der Abb. 13 infolge des erwähnten Versehens nur die theoretische Bedeutung eines wohl nur äußerst selten verwirklichten extremen Falles zukommt, indem man nämlich den so großen Wert $k = 350$ auch dann erhalten würde, wenn die konstanten Anfangs- und Endtemperaturen des Leiters nur um sehr kleine Beträge über bzw. unter der Schmelztemperatur liegen.

Freiburg (Schweiz). A. Huber. 759

[3]) Vgl. z. B. Riemann-Weber: Die Diff.- u. Int.-Gl. d. Mech. u. Phys., hgg. von Ph. Frank u. R. v. Mises 1 (1927), 220 ff. (7. Aufl.).

Erwiderung. Die Konstante k ist falsch bestimmt; in Gl. (12) S. 346 muß es $k = \frac{q}{c\cdot\Theta^*}$ an Stelle von $k = \frac{q}{c}$ heißen, entsprechend auf S. 347 $k^* = \frac{q^*}{c^*\,\Theta^*}$ an Stelle von $k^* = \frac{q^*}{c^*}$. Das Beispiel auf S. 357 ist zu streichen und durch $\vartheta_s = 0{,}8$; $k = 350$ zu ersetzen. Die Bemerkung auf S. 346 unten, daß das Problem allein von den beiden Konstanten ϑ_s und k abhängt, bezieht sich auf die in dem Aufsatz verwendeten reduzierten Größen x, t, ϑ usw.

Alles Übrige, sowohl die Theorie als auch die in den Tabellen und Zahlentafeln zusammengestellten Ergebnisse, bleibt erhalten.

Berlin. Kurt Lachmann. 759a

Ein elektrisches Gerät zum Lösen von Systemen linearer Gleichungen. Zu den im Heft 4, Seite 213 Ihrer Zeitschrift erschienenen Artikel des Herrn Helmuth Bode möchte ich folgendes bemerken:

Am 22. September 1936 habe ich beim Warschauer Patentamt ein auf ähnlichen Prinzipien beruhendes Gerät zur Patentierung angemeldet (Patent Nr 51075). Mein Apparat gibt ebenfalls die Lösung von Systemen linearer Gleichungen durch elektrische Abbildung und dient speziell einem statischen Problem: Der Ermittlung von Hilfswerten zur Bestimmung der statisch-unbestimmten Größen bei Rahmenfachwerk nach der Crossschen Methode durch elektrische Messungen auf Grund des 1. und 2. Kirchhoffschen Gesetzes.

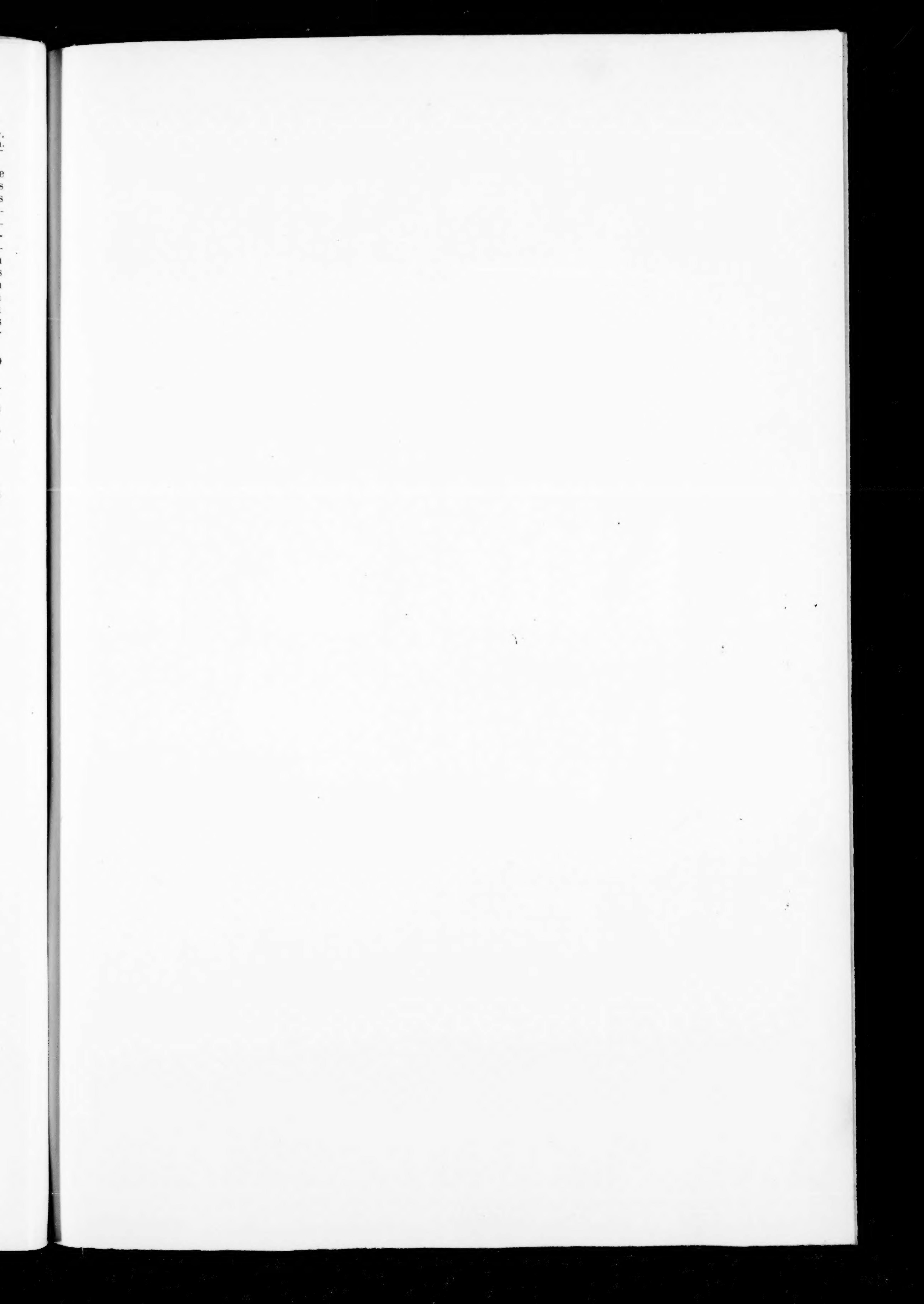
Krakau. A. Pogány. 762

Erwiderung. Ein Hinweis auf die Anwendung der analogen Beziehungen, die für elektrische und statische Knotenpunkte gelten, zur Lösung von Aufgaben der Statik findet sich auf Seite 213 meines Aufsatzes. Im übrigen geht aus der Bemerkung auf gleicher Seite unten hervor, daß meine Untersuchungen bereits Anfang Mai 1935 abgeschlossen waren.

Berlin. H. Bode. 762a

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.



ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

VOLS I-XIX

1921-39

UNIVERSITY MICROFILMS